

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel  
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler  
Redactor: R. Sänger

## INHALT – CONTENTS – SOMMAIRE

HANIN, M., and REINER, M.: On Isotropic Tensor-Functions and the Measure of Deformation . . . . .	377
STADELMAIER, H. H.: Spannungsfeld einer auf den Rand einer Halbebene wirkenden Einzellast bei elastischer Anisotropie . . . . .	393
UCHIDA, SH.: The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe . . . . .	403
VODIČKA, V.: Geschichteter Kreiszylinder im Felde periodischer Temperaturschwankungen . . . . .	422
WIELAND, W.: Die Wasserdampfkondensation an natürlichem Aerosol bei geringen Übersättigungen . . . . .	428

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

CONWAY, H. D.: The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact . . . . .	460
------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## Varia – Miscellaneous – Divers

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques . . . . .	465
-----------------------------------------------------------------------	-----

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sänger, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungs-termin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen Beitrag an die Satzkosten von sFr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von sFr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the *Editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of Original Papers exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of fr. 20.- per page* for pages 17-24, and of *fr. 35.- per page* for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de fr.s. 20.- par page* doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de fr.s. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland sFr. 38.-, Ausland sFr. 48.-, Einzelnummer sFr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland fr. 38.-, foreign fr. 48.-, single copy fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse fr.s. 38.-, étranger fr.s. 48.-, le numéro fr.s. 10.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg

Italien

Dänemark

Marokko

Deutschland

Norwegen

Finnland

Portugal

Holland

Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $1/1$  Seite/page: Fr. 165.-,  $1/2$  Seite/page: Fr. 88.-,  $1/4$  Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1956 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

# On Isotropic Tensor-Functions and the Measure of Deformation

By MEIR HANIN and MARKUS REINER, Haifa, Israel<sup>1)</sup> <sup>2)</sup>

The symbols used are

$A$	indicating ALMANSI,
$A_n, B_n, C_n$	coefficients,
$C$	indicating CAUCHY,
$e$	strain,
$G$	indicating GREEN,
$g_{rs}$	metric tensor,
$H$	indicating HENCKY,
$i, j, k$	principal directions,
$K_n$	constant coefficient,
$l$	length,
$l_0$	initial length,
$l_1$	final length,
$p_s^r$	stress tensor,
$S$	amount of shear, also indicating SWAINGER,
$V$	volume,
$v$	velocity,
$x_s^r, y_s^t$	symmetrical tensors of rank two,
$\alpha$	coefficient,
$\Delta l$	elongation,
$\delta$	KRONECKER's delta,
$\eta$	coefficient of viscosity,
$\eta_c$	coefficient of cross viscosity,
$\lambda$	LAMÉ's constant,
$\mu$	shear modulus,
I, II, III	principal invariants.

1. Let there be two physical quantities represented by two symmetric tensors of second rank  $x_s^r$  and  $y_u^t$ . Let both be related by

$$y_u^t = F(x_s^r), \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> Israel Institute of Technology.

<sup>2)</sup> The research reported in this document has been sponsored in part by the Air Research and Development Command, United States Air Force, under Contract AF 61 (514)-871, through the European Office, ARDC.

and let the relation be isotropic. Then, because of the generalized principle of dimensions, the function  $F$  must be expressible as a sum of symmetric tensors of second rank multiplied by scalars, thus

$$y_s' = \mathcal{F}_0 \delta_s' + \mathcal{F}_1 x_s' + \mathcal{F}_2 x_\alpha' x_s^\alpha + \mathcal{F}_3 x_\alpha' x_\beta' x_s^\beta + \dots \quad (1.2)$$

which we may, for simpler writing, express in the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n x^n = \mathcal{F}_0 x^0 + \mathcal{F}_1 x^1 + \mathcal{F}_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n x^n. \quad (1.3)$$

The  $\mathcal{F}$  are in general functions of the principal invariants  $I_x, II_x, III_x$  of  $x_s'$ , or in a power development

$$\mathcal{F}_n = \sum_{p,q,r} k_{p,q,r}^{(n)} I^p II^q III^r. \quad (1.4)$$

Equation (1.3) can be further developed by means of the Cayley-Hamilton equation which can be written as

$$x^n = I_x x^{n-1} - II_x x^{n-2} + III_x x^{n-3} \quad (1.5)$$

or

$$x^3 = I_x x^2 - II_x x^1 + III_x x^0. \quad (1.5, 1)$$

Therefore

$$x^n = A_n x^2 + B_n x^1 + C_n x^0 \quad (1.6)$$

where the  $A_n, B_n, C_n$ , are also power-series in  $I_x, II_x, III_x$ . This makes (1.3)

$$y = \mathcal{F}_0 x^0 + \mathcal{F}_1 x^1 + \mathcal{F}_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n (A_n x^2 + B_n x^1 + C_n x^0) \quad (1.7)$$

or

$$y = (\mathcal{F}_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n C_n) x^0 + (\mathcal{F}_1 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n B_n) x^1 + (\mathcal{F}_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n A_n) x^2 \quad (1.8)$$

for which we can write with REINER [6], [7]<sup>3)</sup>

$$y_s' = F_0 \delta_s' + F_1 x_s' + F_2 x_\alpha' x_s^\alpha, \quad (1.9)$$

where the scalars  $F_0, F_1, F_2$  are in general power series in the principal invariants of  $x_s'$ .

The equation (1.9) is valid in general, that is also outside the fields of elasticity and hydrodynamics for which it was originally derived; and it is thus shown that the most general relation of symmetric tensors of second rank is of second order in tensors and not higher. However, the  $F$  are power series of the components of  $x_s'$  to any degree through the invariants and the relation (1.9) can be of any degree in tensor-components.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 392.

The problem now arises how to express in a general manner the  $F$  through the  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ , and the  $\mathcal{F}$ , in terms of the invariants I, II, III.

2. We start from (1.6) and the first step in our problem is to evaluate  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  in terms of I, II, III. To simplify notation, denote

$$x_1 = I; \quad x_2 = -II; \quad x_3 = III, \quad (2.1)$$

then (1.5) becomes

$$x^3 = x_1 x^2 + x_2 x^1 + x_3 x^0, \quad (2.2)$$

and the  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  are functions of  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

We derive first recurrence formulas for  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ . From (1.6) and (2.2)

$$\left. \begin{aligned} x^{n+1} &= A_n x^3 + B_n x^2 + C_n x = A_n (x_1 x^2 + x_2 x + x_3) + B_n x^2 + C_n x \\ &= (A_n x_1 + B_n) x^2 + (A_n x_2 + C_n) x + A_n x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

On the other hand

$$x^{n+1} = A_{n+1} x^2 + B_{n+1} x + C_{n+1}.$$

Comparing the coefficients we obtain ( $n \geq 3$ )

$$\left. \begin{aligned} A_{n+1} &= A_n x_1 + B_n, \\ B_{n+1} &= A_n x_2 + C_n, \\ C_{n+1} &= A_n x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

All the  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  can be computed from the recurrence formulas (2.4) and from the initial values

$$A_3 = x_1; \quad B_3 = x_2; \quad C_3 = x_3. \quad (2.5)$$

We get in fact

$$\left. \begin{aligned} A_4 &= x_1^2 + x_2, \\ B_4 &= x_1 x_2 + x_3, \\ C_4 &= x_1 x_3, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} A_5 &= x_1^3 + 2 x_1 x_2 + x_3, \\ B_5 &= x_1^2 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2, \\ C_5 &= x_1^2 x_3 + x_2 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

However, in order to obtain general expressions of  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ , we should first find recurrence formulas for  $A_n$  alone,  $B_n$  alone, and  $C_n$  alone. From (2.4) we have

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_{n-1} x_1 + B_{n-1} = A_{n-1} x_1 + A_{n-2} x_2 + C_{n-2} \\ &= A_{n-1} x_1 + A_{n-2} x_2 + A_{n-3} x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Thus the  $A_n$  satisfy the recurrence formula

$$A_n = A_{n-1} x_1 + A_{n-2} x_2 + A_{n-3} x_3, \quad (2.8)$$

when  $n \geq 6$ . The initial values for formula (2.8) are listed in (2.5) and (2.6). The coefficients  $B_n, C_n$  satisfy the formula

$$B_n = A_{n-1} x_2 + A_{n-2} x_3, \quad C_n = A_{n-1} x_3, \quad (2.9)$$

which follow from (2.4).

It is obvious that the general expression of  $A_n$  must be of the form

$$A_n = \sum \alpha_{a,b,c}^{(n)} x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (2.10)$$

We notice first that if we assign to  $x_1, x_2, x_3$  the dimensions  $d, d^2$  and  $d^3$  respectively, all the terms in the summation must have the same dimension equal to  $d^{n-2}$ . Thus only those  $\alpha_{a,b,c}^{(n)}$  can be different from 0, for which

$$a + 2b + 3c = n - 2, \quad (2.11)$$

$a, b, c$ , being positive integers or zero. Therefore ( $n \geq 3$ )

$$A_n = \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c \quad (2.12)$$

where the index  $(n)$  in  $\alpha^{(n)}$  has been dropped.

To determine  $\alpha_{a,b,c}$  we substitute equation (2.12) into the formula (2.8). Then:

$$\sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c = \sum_{a+2b+3c=n-3} \alpha_{a,b,c} x_1^{a+1} x_2^b x_3^c + \sum_{a+2b+3c=n-4} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^{b+1} x_3^c + \sum_{a+2b+3c=n-5} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^{c+1}$$

or

$$\sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c = \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a-1,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c + \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b-1,c} x_1^a x_2^b x_3^c + \sum_{a+2b+3c=n-2} \alpha_{a,b,c-1} x_1^a x_2^b x_3^c, \quad \left. \right\} \quad (2.13)$$

where  $a + 1, b + 1, c + 1$  were replaced by  $a, b, c$  respectively.

Comparison of coefficients gives ( $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ )

$$\alpha_{a,b,c} = \alpha_{a-1,b,c} + \alpha_{a,b-1,c} + \alpha_{a,b,c-1}. \quad (2.14)$$

We thus obtain a recurrence formula for  $\alpha_{a,b,c}$ . The initial values are [see equations (2.5), (2.6) and (2.12)]:

$$\alpha_{1,0,0} = 1; \quad \alpha_{0,1,0} = 1; \quad \alpha_{0,0,1} = 1. \quad (2.15)$$

Consider now  $\alpha_{a,0,0}$ : By (2.14) and (2.15)

$$\alpha_{a,0,0} = \alpha_{a-1,0} = \cdots = \alpha_{1,0,0} = 1.$$

By further similar considerations we get

$$\alpha_{a,1,0} = \alpha_{a-1,1,0} + \alpha_{a,0,0} = \alpha_{a-2,1,0} + \alpha_{a-1,0,0} + 1 = \cdots = \alpha_{0,1,0} + a = a + 1,$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{a,2,0} &= \alpha_{0,2,0} + 2 + 3 + \cdots + a + (a + 1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + a + (a + 1) = \frac{(a + 1)(a + 2)}{2} = \frac{(a + 2)!}{a! 2!}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

The obvious generalization is

$$\alpha_{a,b,0} = \frac{(a + b)!}{a! b!},$$

and since formulas (2.13), (2.14) are symmetric in respect of  $a, b, c$ , the suggested formula is

$$\alpha_{a,b,c} = \frac{(a + b + c)!}{a! b! c!}. \quad (2.17)$$

Formula (2.17) can be proved easily by induction. Assuming (2.17) to be valid for  $\alpha_{k,m,n}$ , when  $k < a, m < b$  and  $n < c$ , we have from (2.14):

$$\begin{aligned} \alpha_{a,b,c} &= \frac{(a-1+b+c)!}{(a-1)! b! c!} + \frac{(a+b-1+c)!}{a! (b-1)! c!} + \frac{(a+b+c-1)!}{a! b! (c-1)!} \\ &= \frac{(a+b+c-1)!}{a! b! c!} (a+b+c) \end{aligned}$$

which proves equation (2.17) by induction. We have finally the result for  $r \geq 3$

$$A_n = \sum_{a+2b+3c=n-2} (-1)^b \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} \text{I}^a \text{II}^b \text{III}^c. \quad (2.18)$$

Equations (2.9) yield the additional results

$$B_n = \sum_{a+2b+3c=n-1} (-1)^b \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} \text{I}^a \text{II}^b \text{III}^c, \quad (2.19)$$

$$C_n = \sum_{a+2b+3c=n} (-1)^b \frac{c(a+b+c-1)!}{a! b! c!} \text{I}^a \text{II}^b \text{III}^c. \quad (2.20)$$

3. Having thus found expressions for the  $A_n, B_n, C_n$  in (1.8), as series in I, II, III, the next step is the determination of the constants  $k$  of (1.4). This can only be done by means of suitable experiments in which related components of  $y$  and  $x$  are measured, and the component  $y$  is expressed as a function of

the component of  $x$ . The simplest experiment will be one-dimensional in  $x$ . Let  $x(i)$ ,  $x(j)$ ,  $x(k)$  be the proper values of  $x_s'$  with reference to the principal axes  $i$ ,  $j$ ,  $k$ . We can then put  $x(j) = x(k) = 0$  and

$$I = x(i), \quad II = III = 0. \quad (3.1)$$

In this case from (2.18), (2.19), (2.20) with  $b = c = 0$

$$A_n = x(i)^{n-2}; \quad B_n = C_n = 0, \quad (3.2)$$

while

$$\mathcal{F}_n = \sum_p k_{p,0,0}^{(n)} x(i)^p. \quad (3.3)$$

This would serve for the determination of the constants  $k_{p,0,0}^{(n)}$ .

Similarly one could use another experiment in which

$$x(j) = -x(i), \quad x(k) = 0 \quad (3.4)$$

and

$$I = 0, \quad II = -x(i)^2, \quad III = 0, \quad (3.5)$$

when  $a = c = 0$  and

$$A_n = (-1)^{n-2} x(i)^{n-2}, \quad B_n = (-1)^{n-1} x(i)^{n-1}, \quad C_n = 0 \quad (3.6)$$

for the determination of  $k_{0,q,0}^{(n)}$  in

$$\mathcal{F}_n = \sum_q k_{0,q,0}^{(n)} (-x(i))^{2q}. \quad (3.7)$$

We do not propose to follow this up here, but shall investigate the case when the  $\mathcal{F}_n$  are constants, say  $K_n$ , and therefore

$$F_0 = K_0 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n C_n, \quad F_1 = K_1 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n B_n, \quad F_2 = K_2 + \sum_{n=3}^{\infty} K_n A_n. \quad (3.8)$$

Then in the first experiment

$$y(i) = \sum_{n=0} K_n x(i)^n, \quad y(j) = y(k) = K_0, \quad (3.9)$$

while in the second experiment

$$y(i) = K_0 + K_1 x(i) + K_2 x(i)^2, \quad y(j) = K_0 - K_1 x(i) + K_2 x(i)^2, \quad y(k) = K_0. \quad (3.10)$$

The representation of a physical quantity by a tensor will not always be unambiguous. There may be several or even many manners in which that quantity can be defined by means of a tensor. The question then arises how to express one tensor by another. Taking our example from elasticity, this is the

case with the measure of strain. Strain is represented by a symmetric tensor of second rank, but this permits many different measures. What is actually measured in experiments by means of so-called (mechanical or electrical) strain-gauges are not strains but changes of lengths. Two points on the body are marked at distance  $l_0$  before straining and  $l_1$  after straining and

$$\Delta l = l_1 - l_0 \quad (3.11)$$

is measured. Any function of the ratios  $\Delta l/l_0$ , or  $\Delta l/l_1$  can be considered as a measure of strain. In terms of simple, pure extensions, the following measures have been proposed, among others, by CAUCHY, GREEN-ST. VENANT, HENCKY, ALMANSI-HAMEL, SWAINGER<sup>4)</sup> in this order:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \overset{C}{e}(i) = \frac{l_1}{l_0} - 1 = \varepsilon, \\ \text{(ii)} \quad \overset{G}{e}(i) = \frac{(l_1/l_0)^2 - 1}{2} = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \text{(iii)} \quad \overset{H}{e}(i) = \ln \left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \ln (1 + \varepsilon) = -\ln \left(\frac{l_0}{l_1}\right) = -\ln (1 - \varepsilon), \\ \text{(iv)} \quad \overset{A}{e}(i) = \frac{1 - (l_0/l_1)^2}{2} = \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \\ \text{(v)} \quad \overset{S}{e}(i) = 1 - \frac{l_0}{l_1} = \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

In order to appreciate the difference between the measures, note that if a bar is extended to twice its length these measures give

$$\overset{C}{e} = 1, \quad \overset{G}{e} = 1,5, \quad \overset{H}{e} = 0,66, \quad \overset{A}{e} = 0,375, \quad \overset{S}{e} = 0,5,$$

while when it is compressed to half, we have

$$\overset{C}{e} = -0,5, \quad \overset{G}{e} = -0,375, \quad \overset{H}{e} = -0,66, \quad \overset{A}{e} = -1,5, \quad \overset{S}{e} = -1.$$

In engineering, the Cauchy measure is used in the elastic and the Hencky measure in the plastic range. However, expressions in tensor form are known for  $\overset{C}{e}_s$  and  $\overset{A}{e}_s$  only. They were derived by MURNAGHAN [3], and are

$$2 \overset{G}{e}_{rs} = g_{\alpha\beta} (, x^\alpha) (, x^\beta) - {}_{rs}g, \quad (3.13)$$

$$2 \overset{A}{e}_{rs} = g_{rs} - {}_{\alpha\beta}g ({}^\alpha x, ,) ({}^\beta x, ,). \quad (3.14)$$

In these equations an index on the left refers to the initial state, an index on the right to the final state in the deformation. Expressions in tensor form of the

<sup>4)</sup> For references compare TRUESDELL [19], §§ 15, 16.

other measures are not known, except when products of the displacement gradient components are disregarded as in classical elasticity. REINER [8] has shown that this procedure is inadmissible even in 'infinitesimal' elasticity. As an example of the application of the method indicated above we shall show further down how the expression in tensor form of the Hencky measure can be derived.

Before doing so, a few words may be said why the possession of one or the other of these measures is desirable. When in elasticity the classical stress-strain relation is linear

$$\rho_s' = \lambda I \delta_s' + 2 \mu e_s' \quad (3.15)$$

with constant moduli in any one measure, it will not be linear and/or imply variable moduli in any other measure. The advantage of a linear relation is obvious to any experimentalist. Moreover it is known that large elastic strains in certain materials are due to a hidden 'open' structure, and are then linear in the classical Cauchy-measure, on the model of the closed-coiled spring as used in a spring balance. Blown bitumen seems to be such a material, but there should be others. In this case it is desirable to possess a tensor-expression for  $e$  of (3.12). Then there are problems in large plastic deformation. Here the only adequate measure is the Hencky measure, because this is the only measure in which the extensions form a group as can be seen from the relation

$$\ln \frac{l_3}{l_1} = \ln \left( \frac{l_3}{l_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right) = \ln \frac{l_3}{l_2} + \ln \frac{l_2}{l_1}. \quad (3.16)$$

This property of forming a group is required in plasticity because in (ideal) plasticity (as in viscosity) the amount of finite deformation reached at any time is of no physical significance. As a matter of fact no definite meaning can be attached to such deformation because while in elasticity there exists an 'unstrained state' to which the length  $l_0$  is referred, no 'undeformed state' can be defined. In plasticity, as in viscosity, the increase in length  $dl$ , which takes place during the time-increment  $dt$ , can only be referred to the instantaneous length  $l$  so that the extension

$$e = \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_{n+1}}{l_n},$$

which is Hencky's measure. At the same time, only in the Hencky measure can the cubical dilatation be measured by the first invariant as can be seen from

$$e_v = \ln \frac{V}{V_0} = \ln \left( \frac{l_i}{l_{0i}} \cdot \frac{l_j}{l_{0j}} \cdot \frac{l_k}{l_{0k}} \right) = \ln \frac{l_i}{l_{0i}} + \ln \frac{l_j}{l_{0j}} + \ln \frac{l_k}{l_{0k}}, \quad (3.17)$$

so that the deviator is of physical significance; and plasticity relations must be expressed in terms of deviators.

4. Taking up the problem of the expression of measures of deformation, other than the Green and Almansi measures, in tensor form, we do not have to perform experiments. What has been described above as the 'first experiments' is given in equations (3.12). We have

$$(i) \quad (i) \varepsilon = f(2(i) \overset{G}{e}) = 1 + \sqrt{1 + 2(i) \overset{G}{e}} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1}{n} (2(i) \overset{G}{e})^n, \quad (4.1)$$

$$(ii) \quad e(i) = f(2 \overset{A}{e}(i)) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1}{n} (-2 \overset{A}{e}(i))^n, \quad (4.2)$$

$$(iii) \quad 2(i) \overset{H}{e} = \ln(1 + (i) \varepsilon)^2 = \ln(1 + 2(i) \overset{G}{e}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (2(i) \overset{G}{e})^n, \quad (4.3)$$

$$(iv) \quad 2 \overset{H}{e}(i) = -\ln(1 - e(i))^2 = -\ln(1 - 2 \overset{A}{e}(i)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2 \overset{A}{e}(i))^n. \quad (4.4)$$

These developments are valid for  $|2(i) \overset{G}{e}|$  or  $|2 \overset{A}{e}(i)| \leq 1$ . We now introduce for  $y(i)$  in turn  $(i) \varepsilon, e(i), 2(i) \overset{H}{e}, 2 \overset{H}{e}(i)$  and for  $x(i): 2(i) \overset{G}{e}$  and  $2 \overset{A}{e}(i)$ , while  $x(j) = x(k) = 0$ . Comparison with equation (3.9) now shows that  $K_0$  vanishes in every case. From  $n = 1$  upwards the expressions for  $K_n$  are

$$(i) \quad K_n = \binom{2}{n}; \quad (ii) \quad K_n = \binom{1}{n} (-1)^n; \quad (iii) \quad K_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}; \quad (iv) \quad K_n = \frac{1}{n}. \quad (4.5)$$

5. We shall now show in detail how the Hencky measure can be expressed through the Almansi measure. From equation (iv) of (4.5) we know that

$$K_0 = 0, \quad K_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1). \quad (5.1)$$

It then follows from (3.8) that

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n} (-1)^b \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I_x^a II_x^b III_x^c \\ &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c \\ &\quad (a+2b+3c \geq 3) \\ &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c)a!b!c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c; \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

<sup>5)</sup> The equation  $2 \overset{H}{e}(i) = -\ln(1 - 2 \overset{A}{e}(i))$  was derived by HENCKY.

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n-1} (-1)^b \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I_x^a II_x^b III_x^c \\
 &= 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1) a! b! c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c \\
 &\quad (a+2b+3c \geq 2) \\
 &= 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1) a! b! c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c
 \end{aligned} \right\} (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_2 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{a+2b+3c=n-2} (-1)^b \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I_x^a II_x^b III_x^c \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2) a! b! c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c \\
 &\quad (a+2b+3c \geq 1) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2) a! b! c!} I_x^a (-II_x)^b III_x^c
 \end{aligned} \right\} (5.4)$$

In order to perform the summations we introduce in place of  $I_x$ ,  $II_x$ ,  $III_x$ , the variables  $I$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , defined by

$$I_x = I; \quad II_x = -\alpha_2 I^2; \quad III_x = \alpha_3 I^3 \quad (5.5)$$

and we obtain:

$$\left. \begin{aligned}
 F_0 &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)}{(a+2b+3c) a! b! c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c; \\
 F_1 &= 1 + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+1) a! b! c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c; \\
 F_2 &= \frac{1}{2} + \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{(a+2b+3c+2) a! b! c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c.
 \end{aligned} \right\} (5.6)$$

The sums appearing in (5.6) can be evaluated with the help of the formula

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(n+K)!}{n! K!} x^K = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}. \quad (5.7)$$

We consider  $F_0$  first. Since the term with  $a = 0, b = 0, c = 0$  vanishes, we have

$$F_0 (I = 0, \alpha_2, \alpha_3) = 0; \quad (5.8)$$

also, by differentiation with respect to  $I$ , we obtain from (5.6)

$$\left. \begin{aligned} I \frac{\partial F_0}{\partial I} &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^{a+2b+3c} \alpha_2^b \alpha_3^c \\ &= \sum_{a,b,c=0}^{\infty} \frac{c(a+b+c-1)!}{a!b!c!} I^a (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

The right-hand side of equation (5.9) can be evaluated by successive applications of formula (5.7). Thus

$$\left. \begin{aligned} I \frac{\partial F_0}{\partial I} &= \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{c(b+c-1)!}{b!c!} (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c \sum_{a=0}^{\infty} \frac{(a+b+c-1)!}{a!(b+c-1)!} I^a \\ &= \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{c(b+c-1)!}{b!c!} (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c \frac{1}{(1-I)^{b+c}} \\ &= \sum_{b,c=0}^{\infty} \frac{c(b+c-1)!}{b!c!} \left( \frac{I^2 \alpha_2}{1-I} \right)^b \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I} \right)^c \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \frac{c(c-1)!}{c!} \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I} \right)^c \sum_{b=0}^{\infty} \frac{(b+c-1)!}{b!(c-1)!} \left( \frac{I^2 \alpha_2}{1-I} \right)^b \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I} \right)^c \frac{1}{\left( 1 - \frac{I^2 \alpha_2}{1-I} \right)^c} = \sum_{c=1}^{\infty} \left( \frac{I^3 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2} \right)^c \\ &= \frac{1}{1 - \frac{I^3 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2}} - 1 = \frac{1-I-I^2 \alpha_2}{1-I-I^2 \alpha_2-I^3 \alpha_3} - 1 \\ &= \frac{I^3 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2-I^3 \alpha_3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

It follows that  $F_0$  satisfies the partial differential equation

$$\frac{\partial F_0}{\partial I} = \frac{I^2 \alpha_3}{1-I-I^2 \alpha_2-I^3 \alpha_3} \quad (5.11)$$

together with the boundary condition (5.8). Solution of equation (5.11) is straightforward and yields:

$$F_0 = \int_0^I \frac{\alpha_3 \lambda^2 d\lambda}{1-\lambda-\lambda^2 \alpha_2-\lambda^3 \alpha_3}; \quad (5.12)$$

changing the variable of integration to  $\sigma = \lambda/I$ , and substituting relations (5.5), we obtain finally:

$$F_0(I_x, II_x, III_x) = III_x \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{1-I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}, \quad (5.13)$$

where, obviously  $I_x, II_x, III_x$  do not depend on  $\sigma$ .

Next we consider  $F_1$ . It follows from (5.6) that

$$F_1(I = 0, \alpha_2, \alpha_3) = 1 \quad (5.14)$$

and that

$$\frac{\partial}{\partial I} (I F_1) = 1 + \sum_{a, b, c=0}^{\infty} \frac{(b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^a (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c. \quad (5.15)$$

The sum which appears in (5.15) can be evaluated in the same way as the sum in (5.10), and we get the differential equation

$$\frac{\partial}{\partial I} (I F_1) = \frac{1 - I}{1 - I - I^2 \alpha_2 - I^3 \alpha_3}. \quad (5.16)$$

Integrating equation (5.16) under condition (5.14), we obtain

$$I F_1 = \int_0^I \frac{(1-\lambda) d\lambda}{1 - \lambda - \lambda^2 \alpha_2 - \lambda^3 \alpha_3}, \quad (5.17)$$

from which by the substitution  $\sigma = \lambda/I$ , it follows that

$$F_1(I_x, II_x, III_x) = \int_0^1 \frac{(1 - I_x \sigma) d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}. \quad (5.18)$$

$F_2$  can be evaluated similarly. Thus we have from (5.6)

$$F_2(I = 0, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{2}, \quad (5.19)$$

and by differentiation we obtain

$$\frac{1}{I} \cdot \frac{\partial}{\partial I} (I^2 F_2) = 1 + \sum_{a, b, c=0}^{\infty} \frac{(a+b+c)(a+b+c-1)!}{a! b! c!} I^2 (I^2 \alpha_2)^b (I^3 \alpha_3)^c. \quad (5.20)$$

Summation of the series gives then

$$\frac{\partial}{\partial I} (I^2 F_2) = \frac{I}{1 - I - I^2 \alpha_2 - I^3 \alpha_3}. \quad (5.21)$$

When the partial differential equation (5.21) is integrated under condition (5.19), we get

$$F_2 = \frac{1}{I^2} \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{1 - \lambda - \lambda^2 \alpha_2 - \lambda^3 \alpha_3}, \quad (5.22)$$

and proceeding as above, we finally obtain

$$F_2(I_x, II_x, III_x) = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 - I_x \sigma + II_x \sigma^2 - III_x \sigma^3}. \quad (5.23)$$

6. We have thus carried the solution of our problem to the following stage. From (1.9) and (5.13), (5.18), (5.23)

$$2 \overset{H_r}{e}_s = \left. \begin{aligned} & \left[ \text{III} \int_0^1 \frac{\sigma^2 d\sigma}{1 - \text{I} \sigma + \text{II} \sigma^2 - \text{III} \sigma^3} \right] \overset{r}{\delta}_s \\ & + \left[ \int_0^1 \frac{(1 - \text{I} \sigma) d\sigma}{1 - \text{I} \sigma + \text{II} \sigma^2 - \text{III} \sigma^3} \right] 2 \overset{A_r}{e}_s \\ & + \left[ \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 - \text{I} \sigma + \text{II} \sigma^2 - \text{III} \sigma^3} \right] 4 \overset{A_r}{e}_\alpha \overset{A_\alpha}{e}_s \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

where  $\overset{A_r}{e}_s$  is a function of the  $\overset{r}{x}_s$  and the  $g_{rs}$  and  $g_{rs}$  in accordance with (3.14) and

$$\text{I}_{2A} = 2 \delta_\beta^{\alpha} \overset{A}{e}_\alpha^\beta, \quad \text{II}_{2A} = 2 \delta_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \overset{A}{e}_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{A}{e}_{\alpha_2}^{\beta_2}, \quad \text{III}_{2A} = \frac{3}{4} \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \overset{A}{e}_{\alpha_1}^{\beta_1} \overset{A}{e}_{\alpha_2}^{\beta_2} \overset{A}{e}_{\alpha_3}^{\beta_3}. \quad (6.2)$$

By introducing  $\overset{A_r}{e}_s$  from (3.14), we could derive an expression for  $\overset{H_r}{e}_s$  in terms of the displacement gradient. However, no useful purpose would be served by this, the formula becoming extremely unwieldy. We shall rather leave the solution in this form, and give an example for its application which is of interest in itself.

We treat simple shear in Cartesian coordinates in accordance with

$$x_0 = x, \quad y_0 = y - Sz, \quad z_0 = z. \quad (6.3)$$

We have

$$\overset{r}{x}_s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -S \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.4)$$

and therefore

$$2 \overset{A}{e}_{rs} = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -S \end{vmatrix}. \quad (6.5)$$

with the invariants

$$\text{I}_{2A} = -S^2, \quad \text{II}_{2A} = -S^2, \quad \text{III}_{2A} = 0. \quad (6.6)$$

Furthermore

$$4 \overset{A}{e}_{rs} \overset{A}{e}_{\alpha s} = S^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -S \\ 0 & -S & 1 + S^2 \end{vmatrix} \quad (6.7)$$

so that

$$2 \overset{H}{e}_{rs} = S \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S F_2 & F_1 - S^2 F_2 \\ 0 & F_1 - S^2 F_2 & S(F_2 - F_1) + S^3 F_2 \end{vmatrix}. \quad (6.8)$$

We have furthermore

$$F_0 = 0, \quad (6.9)$$

$$F_1 = \int_0^1 \frac{(1 + S^2 \sigma) d\sigma}{1 + S^2 \sigma - S^2 \sigma^2} = \frac{S^2 + 2}{S^2 C} \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right|, \quad (6.10)$$

$$F_2 = \int_0^1 \frac{\sigma d\sigma}{1 + S^2 \sigma - S^2 \sigma^2} = \frac{1}{S^2 C} \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right|, \quad (6.11)$$

where

$$C = \sqrt{1 + \frac{4}{S^2}}. \quad (6.12)$$

Therefore finally

$$\overset{H}{e}_{rs} = \frac{1}{C S} \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{S}{2} \end{vmatrix} \quad (6.13)$$

with

$$I_H = 0, \quad II_H = -\frac{1}{4} \left( \ln \left| \frac{C+1}{C-1} \right| \right)^2, \quad III_H = 0. \quad (6.14)$$

It is, of course, possible to arrive at these special results in a much simpler manner by geometrical considerations as was done by REINER [7], following a suggestion by LOVE [2]. The method used here will reveal its power in more general cases as for instance in a problem of torsion. This will be shown at another place.

7. If we assume that the stress-strain relation for an elastic material is given by (3.15), and we use the Hencky measure, we thus find that simple shear is connected not only with shearing tractions but also with a tensile traction in the direction of the shear (in our case the  $y$ -direction), and a compressive

traction in the direction normal to it (in our case the  $z$ -direction). This is so even when the shear is infinitesimal. Because, let  $S$  be so small that it can be neglected against any number equal or larger than unity, then (where  $\varepsilon$  indicates 'infinitesimal' strain)

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{S^2}{4}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{S^2}{4}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{S}{2}, \quad \varepsilon_{zx} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = 0. \quad (7.1)$$

In this development it should be noted that  $S^2/4$  can be neglected against one in  $1 + (S^2/4)$ , but cannot be neglected when it is the *first term* in a series. In this manner second order effects appear also in infinitesimal elasticity, as has been shown by REINER [9], [10] theoretically, and realized long ago experimentally by POYNTING [4], [5], when he found that cylindrical wires extend in length when subjected to infinitesimal torsion. REINER [10] has treated POYNTING's observations using the Almansi measure  $\overset{A}{e}_s^r$  and an extension of (3.15), including a third term in accordance with (1.9). For problems of elasticity this may possibly be the best that can be done. But as has been said above in § 3, this is not an adequate treatment for either plasticity or viscosity. Here the only useful measure is the Hencky measure  $\overset{H}{e}_s^r$ . To show this in some detail for the case of viscosity, consider a cylindrical tube of length  $l$ , surrounding a straight streamline of a viscous liquid. Let one end of this tube be fixed<sup>6)</sup>, and the other end move with velocity  $v_l$ . Then  $v_l = d l/dt$ <sup>7)</sup>, and the longitudinal flow<sup>8)</sup>  $f_l = v_l/l$ . Introducing the first expression for  $v_l$  we find

$$f_l = \frac{(dl/dt)}{l} = \frac{(dl/l)}{dt} = \frac{d(\ln l)}{dt}.$$

This is the *physical* consideration underlying the Navier-Stokes equations, where by premature linearization of the rate of deformation to  $f_{rs} = (v_{r,s} + v_{s,r})/2$  second order effects are masked, and in the simple shear treated before  $f_{yy}$  and  $f_{zz}$  are absent. But let a viscous liquid be contained between two horizontal parallel circular platens, one stationary and the other rotating about a vertical axis ( $z$ ). The radial direction may be assumed as our  $x$ . The circular streamlines will have our  $y$  as tangent. Similar to (7.1), there will be a pressure in the  $z$ -direction. There should be no tractions in the direction  $x$ . However there will be tension in the direction  $y$ , and because of the curvature of the streamlines, this tension will have a 'strangulating' effect resulting in a radial force acting towards the centre. If we make a hole in the upper platen, and attach

<sup>6)</sup> Or consider all kinematic quantities relative to a coordinate system moving with this point.

<sup>7)</sup> Or provided the deformation is homogeneous,  $l$  is an element of length.

<sup>8)</sup> We use here 'flow' for what is usually designated as 'rate of deformation', an expression which may be misleading. MURNAGHAN [3] uses 'space derivative of the virtual displacement vector'.

to it a vertical tube, the liquid, because of the  $-p_{zz}$  will be forced there upwards against the action of gravity, and that mass of liquid which moves in the tube upwards will be replaced by liquid moving radially towards the centre against the centrifugal forces. The whole mechanism will thus form a kind of 'centripetal pump'.

Actually such a centripetal pump effect is known under the name of Weissenberg-phenomenon [12], [13]. It has been variously explained as due to an elasticity of the liquid [1] or to 'cross-viscosity', a term referring to  $\eta_c$  in an extension of the linear classical stress-flow relation to include a second order term [6], [11]. It was thought that it could not be explained from viscosity alone. The foregoing considerations have shown that such explanation is possible, in which case the effect should be present also in inelastic liquids under suitable conditions, and in the absence of cross-viscosity. Actually, one of us (M. R.) has recently found that a centripetal-pump effect is present in air. The experiments will be reported upon at another place together with the theoretical treatment.

#### REFERENCES

- [1] T. W. DEWITT, *Rheological Equation of State which Predicts non-Newtonian Viscosity, Normal Stresses and Dynamic Moduli*, J. appl. Phys. 20, 889-894 (1955).
- [2] A. E. H. LOVE, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge 1906-1927).
- [3] F. O. MURNAGHAN, *Finite Deformations of an Elastic Solid*, Amer. J. Math. 59, 235-260 (1937).
- [4] J. H. POYNTING, *On Pressure Perpendicular to the Shear Planes in Finite Pure Shears and on Lengthening of Loaded Wires when Twisted*, Proc. roy. Soc. [A] 82, 546 (1909).
- [5] J. H. POYNTING, *On the Changes in the Dimensions of a Steel Wire when Twisted*, Proc. roy. Soc. [A] 86, 534 (1912).
- [6] M. REINER, *A Mathematical Theory of Dilatancy*, Amer. J. Math. 67, 350-362 (1945).
- [7] M. REINER, *Elasticity Beyond the Elastic Limit*, Amer. J. Math. 70, 433-466 (1948).
- [8] M. REINER, *Second Order Effects in Elasticity and Hydrodynamics*, Bull. Res. Counc. Israel 3, 372-379 (1954).
- [9] M. REINER, *Second Order Effects in Infinitesimal Elasticity*, Sci. Publ. Inst. Tech. Hebrew. tech. Coll. 6 (1955).
- [10] M. REINER, *The Complete Elasticity Law for Some Metals According to Poynting's Observations*, Appl. Scient. [A] 5, 281-295 (1955).
- [11] R. S. RIVLIN, *The Hydrodynamics of Non-Newtonian Fluids*, Proc. roy. Soc. [A] 193, 260-281 (1948).
- [12] C. TRUESDELL, *A Program of Physical Research in Classical Mechanics*, ZAMP 3, 79-95 (1952).
- [13] C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. rat. Mech. Anal. 1, 125-300 (1952).

*Zusammenfassung*

Es wird gezeigt, dass eine isotrope Beziehung zwischen zwei symmetrischen Tensoren zweiten Ranges auf die Form

$$y_s^r = \left( \mathcal{F}_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n C_n \right) \delta_s^r + \left( \mathcal{F}_1 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n B_n \right) x_s^r + \left( \mathcal{F}_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{F}_n A_n \right) x_{\alpha}^r x_s^{\alpha}$$

gebracht werden kann, wobei

$$\mathcal{F}_n = \sum_{p, q, r} k_{p, q, r}^{(n)} I^p II^q III^r$$

sowie die  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  ähnliche Potenzreihen in den Hauptinvarianten von  $x_s^r$  sind. Die Konstanten  $k$  müssen durch geeignete Versuche bestimmt werden, die über den Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen  $x_s^r$  und  $y_s^r$  Auskunft geben. Die  $\mathcal{F}_n$  können aber auch Konstanten sein. Dies trifft beispielsweise zu, wenn  $x_s^r$  und  $y_s^r$  verschiedene Masse der Deformation sind. In diesem Falle kann man zum Beispiel das logarithmische Hencky-Mass durch das Almansi-Mass ausdrücken. Tut man dies, dann ergeben sich aus einer quasilinearen Spannungs-Fluss-Beziehung gewisse Effekte zweiter Ordnung in zähen Flüssigkeiten, auch dann, wenn das Medium unelastisch und die Zähigkeit gering ist. Damit lasse sich ein Zentripetalpump-Effekt in Luft, der neulich beobachtet worden ist, theoretisch erklären.

(Received: February 19, 1956.)

## Spannungsfeld einer auf den Rand einer Halbebene wirkenden Einzellast bei elastischer Anisotropie

Von HANS H. STADELMAIER, Raleigh, North Carolina, USA<sup>1)</sup>

### Einleitung

Die Elastizitätstheorie anisotroper Körper hat in jüngster Zeit neue Anregungen erfahren, besonders im Zusammenhang mit der Theorie der Versetzungen. Sieht man nämlich von trivialen Fällen ab (wie homogener Spannungszustand), so darf man Ergebnisse von der Theorie isotroper Körper nicht wahllos auf den anisotropen Fall übertragen, wenn man nicht auf oft wesentliche Feinheiten verzichten will. Leider steht einem ausgiebigen Gebrauch der Elastizitätstheorie anisotroper Körper die mathematische Umständlichkeit, aber auch ein gewisser Mangel an einfachen anschaulichen Beispielen entgegen.

<sup>1)</sup> Department of Engineering Research, North Carolina State College.

In der vorliegenden Arbeit soll daher ein Beispiel durchgerechnet werden, dessen Lösung von allgemeinem Interesse sein dürfte. Es wird dabei mit nicht zu starker Einschränkung der Allgemeinheit ein geschlossener Ausdruck gefunden zur Lösung eines Problems, dessen isotrope Lösung bereits bekannt ist. Auf der praktischen Seite ergibt sich dabei die Möglichkeit zur Erklärung der bereits vorliegenden experimentellen Beobachtung einer ungewöhnlichen Spannungsverteilung.

### Problemstellung

Aus den Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustands unter Hinzunahme der Kompatibilitätsbedingungen für die Dehnungen ergibt sich folgende Differentialgleichung für die Spannungsfunktion:

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2 \left( s'_{12} + \frac{1}{2} s'_{66} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + s'_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2 s'_{16} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} - 2 s'_{26} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da diese Gleichung bereits von VOIGT<sup>2)</sup> angegeben ist, soll auf ihre ausführliche Herleitung verzichtet werden. Aus  $\varphi$  erhält man die Spannungen in der bekannten Weise:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Die  $s'_{ik}$  sind Elastizitätskoeffizienten in der Bezeichnungsweise von VOIGT<sup>2)</sup>. Dabei deuten die Striche an, dass sie von der Orientierung zwischen dem gewählten Koordinatensystem ( $x, y, z$ ) und den Kristallachsen abhängen.

Gleichung (1) ist, wenn man von der Beschränkung auf das zweidimensionale Spannungssystem absieht, allgemein gültig. In dem Fall, dass die  $z$ -Achse eine sechszählige Symmetriearchse ist, geht jegliche Anisotropie verloren, und die Differentialgleichung reduziert sich zu  $\nabla^4 \varphi = 0$ . Eine weniger drastische Einschränkung, bei der die Auswirkungen der Kristallanisotropie noch anschaulich hervortreten, ist die Forderung, dass die  $x$ -Achse oder die  $y$ -Achse (oder beide) eine geradzählige Symmetriearchse bildet. Die Vereinfachung für die Rechnung ergibt sich daraus, dass

$$s'_{16} = s'_{26} = 0.$$

Die Gleichung (1) geht dann über in

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2 a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + b \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \quad (2)$$

<sup>2)</sup> W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik* (Leipzig und Berlin 1910).

wobei

$$a = \frac{s_{12} + s'_{66}/2}{s'_{11}} \quad \text{und} \quad b = \frac{s_{12}}{s'_{11}}.$$

Die Randbedingungen lauten

$$\sigma_y(x \neq 0, y = 0) = 0, \quad \text{Einzellast } P \text{ in } (0, 0), \quad \sigma_x(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Folgende Spannungsfunktion, die in zwei Abschnitte zerfällt, erfüllt (2) und (3):

Falls  $a^2 > b$ ,

$$\varphi = \left. \begin{aligned} & -\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{1}{1-p/q} \left[ x \operatorname{arctg} \frac{p y}{x} + \frac{p y}{2} \ln(x^2 + p^2 y^2) - p y \ln p \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{1-q/p} \left[ x \operatorname{arctg} \frac{q y}{x} + \frac{q y}{2} \ln(x^2 + q^2 y^2) - q y \ln q \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

mit

$$a = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad \text{und} \quad b = p^2 q^2$$

bzw.

$$p^2 = a - \sqrt{a^2 - b}, \quad q^2 = a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Ist dagegen  $a^2 < b$ , so gilt

$$\varphi = \left. \begin{aligned} & \frac{P}{2\pi s} \left\{ [(r^2 + s^2) y - s x] \operatorname{arctg} \frac{r y}{x - s y} \right. \\ & - \frac{1}{2} r x \ln[r^2 y^2 + (x - s y)^2] - [(r^2 + s^2) y + s x] \operatorname{arctg} \frac{r y}{x + s y} \\ & \left. + \frac{1}{2} r x \ln[r^2 y^2 + (x + s y)^2] - 2 r s y \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

mit

$$a = r^2 - s^2 \quad \text{und} \quad b = (r^2 + s^2)^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{b}), \quad s^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{b}).$$

Es lässt sich zeigen, dass die Fälle (4a) und (4b) ineinander übergehen für  $a^2 = b$  (dann wird  $p^2 = q^2 = r^2 = a, s = 0$ ). Ist schliesslich  $a = 1$  (so dass auch  $b = 1$ ), so gehen beide Lösungen über in den Ausdruck

$$\varphi = -\frac{P}{\pi} x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (4c)$$

der als Lösung des isotropen Problems bekannt ist.

## Spannungen

Aus der Spannungsfunktion folgt durch Differentiation

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{y^3}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \\ \sigma_x &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{x^2 y}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{x y^2}{(x^2 + p^2 y^2)(x^2 + q^2 y^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

wenn  $a^2 > b$  und

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2 P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{y^3}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2][r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \\ \sigma_x &= \frac{2 P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{x^2 y}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2][r^2 y^2 + (x + s y)^2]}, \\ \tau_{xy} &= \frac{2 P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{x y^2}{[r^2 y^2 + (x - s y)^2][r^2 y^2 + (x + s y)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

für  $a^2 < b$ .

Diese Spannungen reduzieren sich bei  $p = q = r = 1, s = 0$  (Isotropie) auf die bekannten Formen:

$$\sigma_y = \frac{2 P}{\pi} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_x = \frac{2 P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{2 P}{\pi} \cdot \frac{x y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5c)$$

Um zu einer übersichtlichen Darstellung der Formeln (5a) und (5b) zu gelangen, werden sie auf Polarkoordinaten transformiert, so dass

$$y = R \sin \vartheta, \quad x = R \cos \vartheta, \quad \theta = 90^\circ - \vartheta.$$

Dann folgt aus den Transformationseigenschaften der Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_x \cos^2 \vartheta + \sigma_y \sin^2 \vartheta + 2 \tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \vartheta + \sigma_y \cos^2 \vartheta - 2 \tau_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \tau_{R\theta} &= \tau_{xy} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Einsetzen der Spannungen aus (5a) bzw. (5b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{P}{\pi} p q (p+q) \frac{1}{\sin^3 \vartheta (\operatorname{ctg}^2 \vartheta + p^2)(\operatorname{ctg}^2 \vartheta + q^2)} \cdot \frac{1}{R}, \\ \sigma_\theta &= 0, \quad \tau_{R\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

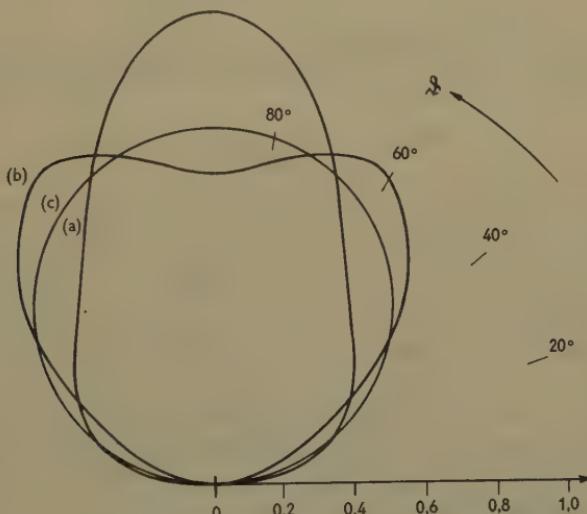
Für  $a^2 > b$  und

$$\left. \begin{aligned} \sigma_R &= \frac{2 P}{\pi} r (r^2 + s^2) \frac{1}{\sin^3 \vartheta [r^2 + (s - \operatorname{ctg} \vartheta)^2] [r^2 + (s + \operatorname{ctg} \vartheta)^2]} \cdot \frac{1}{R}, \\ \sigma_\theta &= 0, \quad \tau_{R\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

Für  $a^2 < b$ . Wird wiederum  $p = q = r = 1, s = 0$  gesetzt, so erhält man (mit  $\vartheta = 90^\circ - \theta$ )

$$\sigma_R = \frac{2 P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{R}, \quad (6c)$$

das bekannte Ergebnis für den isotropen Fall. Man sieht, dass in allen Fällen die Spannung eine einfache Radialspannung ist. Daher wird in Figur 1 zur Veranschaulichung der Spannungsverteilung eine Darstellung von  $\sigma_R$  als Funktion von  $\vartheta$  bei konstantem  $R$  gewählt. Dabei ist die Art der Abweichung vom isotropen Fall klar ersichtlich. Auffallend sind im Fall (b) die zwei Maxima der Spannung, die in der Nähe von  $\operatorname{ctg} \vartheta = \pm s$  auftreten. Diese sind physikalisch zu erwarten, wie noch ausgeführt werden wird. Dazu muss aber zunächst noch gezeigt werden, wie die  $p, q, r, s$  aus den auf die Kristallachsen bezogenen Elastizitätskoeffizienten  $s_{ik}$  zu gewinnen sind.



$$\frac{\pi R}{2 P} \cdot \sigma_R$$

Figur 1

Polardiagramm der Spannungen nach Gleichungen (6). Die Kurven (a) und (b) entsprechen den Orientierungen (a) und (b) (siehe Text). Der Kurve (c) entspricht Isotropie.

## Berechnung der Koeffizienten

Die Koeffizienten  $p, q, r, s$  sind die in (4a) bzw. (4b) angegebenen Funktionen von  $a$  und  $b$ . Die letzteren hängen wiederum nach (2) ab von  $s'_{11}$ ,  $s'_{12}$ ,  $s'_{22}$  und  $s'_{66}$ . Diese gestrichenen elastischen Parameter hängen von sämtlichen festen Parametern  $s_{ik}$  sowie den Richtungskosinussen zwischen  $(x, y, z)$  und den kristallographischen Achsen  $(\xi, \eta, \zeta)$  ab. Die Schritte zur Gewinnung der  $s'_{ik}$  sind bei VOIGT ausführlich, wenn auch etwas umständlich, dargestellt. Obwohl die Berechnung im allgemeinen mühsam ist, lassen sich beispielsweise beim kubischen System durch geschickte Umformung der Ausdrücke in den Richtungskosinussen für den praktischen Gebrauch recht handliche Formen gewinnen<sup>3)</sup>. Das in Figur 1 angeführte Beispiel ist daher mit kubischen Koeffizienten berechnet. Sie sind nachstehend angegeben.

Das Schema der Richtungskosinus ist

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
$y$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
$z$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$

ferner ist  $\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 = \Omega_\alpha$  usw.

Dann lauten die benötigten Elastizitätskoeffizienten:

$$s'_{11} = s_{11} - 2 \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) \Omega_\alpha,$$

$$s'_{22} = s_{11} - 2 \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) \Omega_\beta,$$

$$s'_{12} = s_{12} - \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) (\Omega_\gamma - \Omega_\alpha - \Omega_\beta),$$

$$s'_{66} = s_{44} - 4 \left( s_{11} - s_{12} - \frac{1}{2} s_{44} \right) (\Omega_\gamma - \Omega_\alpha - \Omega_\beta).$$

Dabei sind  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  und  $s_{44}$  die auf die Kristallachsen bezogenen festen Parameter. Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  lassen sich nunmehr nach (2) leicht berechnen, und daraus folgen nach (4) unmittelbar die  $p, q, r, s$ .

Für die Zahlenwerte der festen Elastizitätskoeffizienten unseres Beispiels wurden Angaben für  $\alpha$ -Eisen nach SCHMID und BOAS<sup>4)</sup> verwendet. Sie

<sup>3)</sup> Eine vollständige Liste der 21  $s'_{ik}$  sowie der 21  $c'_{ik}$  für das kubische System zusammen mit Tabellen zur Vereinfachung der Berechnung ist erhältlich als *Engineering School Bulletin No. 60* (North Carolina State College).

<sup>4)</sup> E. SCHMID und W. BOAS, *Kristallplastizität* (Berlin 1935).

lauten:

$$s_{11} = 7,57 \cdot 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}}, \quad s_{12} = -2,82 \cdot 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}},$$

$$s_{44} = 8,62 \cdot 10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}}.$$

Die von MÖLLER und BRASSE<sup>5)</sup> neubestimmten Werte (8,53; -3,24; 8,49) führen zu nur geringfügigen Unterschieden in den Ergebnissen.

In Figur 1 werden neben dem isotropen Fall (c) zwei Fälle unterschieden. Diese sind beschrieben durch Angabe der Millerschen Indizes derjenigen kristallographischen Richtungen, welche mit der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse zusammenfallen. Dabei sind die Orientierungen so gewählt, dass eine der Lösung (4a), die andere der Lösung (4b) entspricht.

Orientierung (a):  $x = \langle 110 \rangle$ ,  $y = \langle 110 \rangle$ ,  $z = \langle 100 \rangle$ . Dafür ist  $\Omega_\alpha = \Omega_\beta = 1/4$ ,  $\Omega_\gamma = 0$ ,

$$a = 2,34; \quad b = 1 \quad (a^2 > b); \quad p = 0,47; \quad q = 2,12.$$

Orientierung (b):  $x = \langle 100 \rangle$ ,  $y = \langle 110 \rangle$ ,  $z = \langle 110 \rangle$ . Dafür ist  $\Omega_\alpha = 0$ ,  $\Omega_\beta = \Omega_\gamma = 1/4$ ,

$$a = 0,20; \quad b = 0,60 \quad (a^2 < b); \quad r = 0,70; \quad s = 0,54.$$

Die Orientierungen (a) und (b) erfüllen außerdem die Forderung, dass  $x$  oder  $y$  eine geradzählige Symmetriechse sei.

### Diskussion

Vergleicht man in Figur 1 das Verhalten der Fälle (a) und (b) mit dem des isotropen Falles (c), so fällt sofort auf, dass in den beiden anisotropen Fällen die Spannungen sich in gewissen Vorzugsrichtungen verstärken: im Fall (a) hauptsächlich in der  $y$ -Richtung, im Fall (b) in zwei Schrägrichtungen. Zum Verständnis dieses Verhaltens braucht man nur zu bedenken, dass die bevorzugten Richtungen elastisch harte Richtungen, also Richtungen maximalen  $E$ -Moduls, sind. Die elastisch harten Richtungen übernehmen also tatsächlich, wie man auch ohne Rechnung erwarten würde, den grösseren Anteil der Spannungen. Dieses Bild bedarf nur noch einer kleinen Korrektur, wie man am besten mit Fall (b) ausführt. Da der anisotrope Körper nicht allein in der härtesten  $\langle 111 \rangle$ -Richtung, sondern auch in allen anderen Richtungen endliche (wenn auch kleinere) Werte des  $E$ -Moduls hat, wird man vermuten, dass die maximale Spannung irgendwo zwischen der Richtung der Einzellast am Rand

<sup>5)</sup> H. MÖLLER und F. BRASSE, Arch. Eisenhüttenw. 26, 231 (1955).

und der Richtung grössten  $E$ -Moduls zu suchen ist. So findet man auch, dass die  $\langle 111 \rangle$ -Richtung in einem Winkel  $\vartheta = 55^\circ$  von der  $x$ -Achse auftritt, das Maximum der Spannung dagegen bei etwa  $62^\circ$ .

Das Ergebnis lässt sich am einfachsten so zusammenfassen, dass für dieses Problem die maximale Spannung auftritt,

1. im isotropen Fall — in Richtung der eingeprägten Randspannung,
2. bei Anisotropie — in einer von der Richtung maximalen  $E$ -Moduls stark mitbestimmten Richtung.

Das gilt selbstverständlich auch im Fall (a), wo  $x$ - und  $y$ -Richtung härteste Richtungen sind. Bei der  $x$ -Richtung macht sich das allerdings nur bemerkbar durch eine schwache Ausbuchtung der Kurve bei niedrigen Werten von  $\vartheta$ , da die Spannung nach wie vor in der  $x$ -Richtung selbst verschwinden muss.

### Vergleich mit der Erfahrung

Das einzige dem Verfasser bekannte experimentelle Ergebnis, das eindeutig auf das Bestehen einer solchen Lösung hinweist, ist ein Fall, bei dem sich die Einzellast am Rand offenbar periodisch wiederholt. Da die Berechnung der für eine solche Lösung benötigten Fourier-Koeffizienten wohl mit erheblichen Umständen verbunden ist, sei die Besprechung dieser Lösung auf die wichtigsten Grundzüge beschränkt. Es interessiert hier insbesondere der Fall (b). Ausgehend von den Einzellasten am Rand, wird man zunächst in einem ungestörten Bereich die schon besprochene Lösung finden. Wie sich die Spannungsfelder dann gegenseitig durchsetzen, kann man in grober Annäherung durch Betrachten der «Grundwelle» der Fourier-Entwicklung ermitteln, zu der man am einfachsten gelangt durch Aufsuchen einer in  $x$  periodischen Lösung der Differentialgleichung (2).

Mit dem Ansatz

$$\varphi = A e^{ikx + i\hbar \lambda y}, \quad (7)$$

wobei sich ergibt, dass

$$\lambda_{1-4} = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a^2 - b} - a},$$

erhält man.

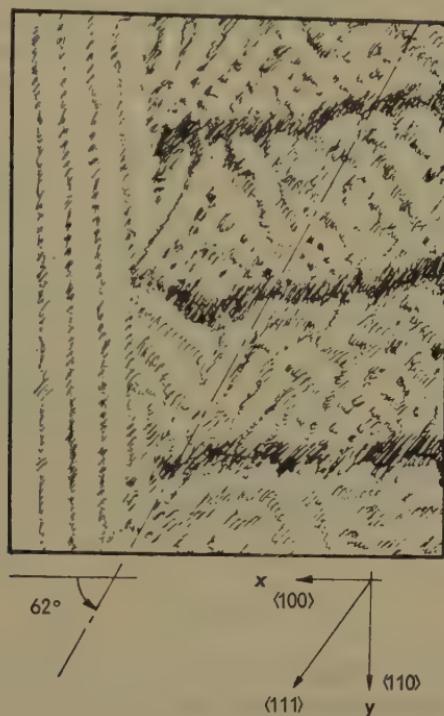
$$\varphi = e^{ikx} (B_1 e^{-\phi h y} + B_2 e^{-q h y} + B_3 e^{\phi h y} + B_4 e^{q h y}), \quad (7a)$$

solange  $a^2 > b$ . Dabei haben  $\phi$  und  $q$  die gleiche Bedeutung wie in (4a). Ist dagegen  $a^2 < b$ , so erhält man

$$\varphi = e^{ikx} [C_1 e^{-(r-is)h y} + C_2 e^{-(r+is)h y} + C_3 e^{(r-is)h y} + C_4 e^{(r+is)h y}].$$

Die  $r$  und  $s$  sind identisch mit denen von (4b). Die Konstanten  $B$  und  $C$

bestimmen sich aus den Randbedingungen<sup>6)</sup>. Es ist zu bemerken, dass Lösung (7b) nicht nur in  $x$ , sondern auch in  $y$  periodisch ist, da  $s$  reell ist. Es folgt daraus unmittelbar, dass selbst bei nur in  $x$  periodischer Randbedingung die Spannungen in  $x$  und  $y$  periodisch sind.



Figur 2  
Nichthomogene Spannungsverteilung nach DIJKSTRA und MARTIUS<sup>7)</sup>.

Betrachtet man die in Figur 2 skizzierte Spannungsverteilung, so fällt die Periodizität in  $y$  sofort auf. Zum besseren Verständnis von Figur 2 seien noch einige Einzelheiten über sein Entstehen angefügt. Es handelt sich um die Nachzeichnung einer mikroskopischen Aufnahme (Vergrösserung etwa 100fach) der Verteilung von kolloidalen  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  auf der elektrolytisch polierten Oberfläche einer unter Zug befindlichen Probe von  $\alpha$ -Eisen und ist einer Arbeit von DIJKSTRA und MARTIUS<sup>7)</sup> entnommen. Dabei ordnen sich die magnetischen Bezirke, deren Grenzen sich durch das Kolloid abzeichnen, in der Richtung

<sup>6)</sup> Es sei übrigens bemerkt, dass die Lösung (4) natürlich nicht «erraten» wurde, sondern durch Fourier-Synthese aus (7a) und (7b) ermittelt ist. Doch ist dieser Rechengang uninteressant per se und würde die Geschlossenheit der Darstellung nur stören.

<sup>7)</sup> L.J. DIJKSTRA und U.M. MARTIUS, Rev. Mod. Phys. 25, 146 (1953).

maximaler elastischer Spannung an. Die inhomogene und doppeltpériodische Spannungsverteilung löst allmählich eine homogene Spannungsverteilung ab, so dass die inhomogene auf Kosten der benachbarten homogenen (deren parallele Streifen links in Figur 2 zu sehen sind) wächst. Das lässt sich folgendermassen erklären: Sobald eine Korngrenze oder Mosaikgrenze bei der elastischen Verformung nicht mehr imstande ist, sich als Ganzes zu bewegen, sondern sich gegenüber der Umgebung verfestigt, setzt sich die elastische Verformung durch die sich periodisch wiederholenden weicheren «Lücken» der Grenze hindurch fort. Letztere haben natürlich die Periodizität der die Korn- oder Mosaikgrenze bildenden Versetzungen.

Vergleicht man die Winkel  $\vartheta$ , welche die sich deutlich abzeichnenden Richtungen maximaler Spannung mit der  $x$ -Achse bilden, so findet man fast genau  $62^\circ$  (wie im vorigen Abschnitt auch berechnet), während sie sich von  $55^\circ$  noch deutlich unterscheiden. Diese gute Übereinstimmung zwischen experimentellem Ergebnis und Theorie ergibt sich übrigens teilweise wegen des zu vernachlässigenden Einflusses der Glieder mit  $s'_{16}$  und  $s'_{26}$ , selbst wenn die Orientierung noch mehrere Winkelgrade von der hier angenommenen abweicht. Es sei noch vermerkt, dass durch Ausmessen der Periodenlänge in  $y$  der Abstand zwischen den Versetzungen in  $x$  ermittelt werden kann. Es ist nämlich, wie aus Gleichung (7b) hervorgeht, die Periodenlänge in  $y$ :  $2\pi/k s$ . Man sieht gleichfalls, dass die gesuchte Periodenlänge in  $x$ ,  $2\pi/k$ , sich nur um  $1/s$  davon unterscheidet. Nun gilt aber nach (6b) angenähert, dass

$$s = \operatorname{ctg} \vartheta_{\max},$$

wobei  $\vartheta_{\max}$  der Winkel maximaler Normalspannung ist. Damit findet man leicht die gesuchte Periodenlänge in  $x$ .

Diese Arbeit wurde gefördert von der National Science Foundation unter Kontrakt-Nr. G-1113.

Der Verfasser dankt seinem Kollegen, Herrn Prof. Dr. P. H. McDONALD, für manche anregende Diskussion.

### Summary

The solution of the two-dimensional stress problem in an anisotropic medium is given in closed form for the boundary conditions of a concentrated load at a point on the straight boundary of a semi-infinite plate. The properties of a periodic repetition of such concentrated loads are discussed and compared with an existing observation of a non-uniform stress distribution in  $\alpha$ -iron.

(Eingegangen: 24. Oktober 1955.)

# The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe

By SHIGEO UCHIDA, Tokyo, Japan<sup>1)</sup>

## Summary

An exact solution of pulsating laminar flow superposed on the steady motion in a circular pipe is presented under the assumption of parallel flow to the axis of pipe. Total mass of flow on time average is found to be identified with that given by HAGEN-POISEUILLE's law calculated on the steady component of pressure gradient. The phase lag of velocity variation from that of pressure gradient increases from zero in the steady motion to 90° in the pulsation of infinite frequency. Integration of work for changing kinetic energy of fluid through one period is vanished, while that of dissipation of energy by internal friction remains finite and excess amount caused by the components of periodic motion is added to the components of steady flow.

It is found that the given rate of mass flow is attained in pulsating motion by giving the same amount of average gradient of pressure as in steady flow, but that excess works to the steady case are necessary for maintenance of this motion.

## 1. Introduction

The purpose of the investigations on nonsteady motions of viscous fluid through pipes or channels was in early time to analyze mainly the propagation of sound waves and the stability problems on laminar motions, and many of them were treated by the principle of small perturbations. On the one hand, pulsating flows through small pipes have been carried out for long years in the circulation system of the blood, and recently theories of pulsating flow are applied to the super-charging system of reciprocating engines and the surging phenomena in power plants, and so forth. For the purpose of analyses of these problems, pressure gradients necessary for the transmission of given mass of fluid, energy dissipations caused by periodic motion and necessary works for maintaining pulsation flow will be significant and interesting factors. The present investigation aims mainly at the analysis of these characteristics in pulsating motions.

In an experiment on sound waves in resonators, RICHARDSON [1]<sup>2)</sup> measured velocity distributions across an orifice of circular section and he found the fact

<sup>1)</sup> Institute of Science and Technology, University of Tokyo.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 421.

that there is a portion of the maximum velocity not far distant from the wall. The theoretical verification of this phenomena was made by SEXL [2], and further confirmatory experiment was also made by RICHARDSON and TYLER [3] on the flow produced by the reciprocating motion of a piston. The object of their investigations was a pure periodic motion without mean transmission of mass of fluid.

The present author has found that the fundamental equation can be linearized by introducing the assumption of axially parallel flow which may be allowed for the expression of principal characteristics of pulsating flows as mentioned above and that periodic motions superposed on steady Poiseuille flow which causes mean transmission of fluid mass in one direction can be solved in an exact form. By the property of the linearity, elements of periodic part of solution are given in the identical form with that of SEXL's solution. SEXL [2] has calculated velocity distributions only, while in the present paper principal characters as a nonsteady pipe-flow, i. e. relation between mean mass-flow and necessary gradient of pressure and loss of energy by dissipation which must be overcome by the excess work from the exterior, etc., are reported.

## 2. Fundamental Equations

Nonsteady flow of incompressible fluid with axial symmetry through a rectilinear pipe of circular section is considered. It will be convenient to take the cylindrical coordinates whose  $x$  axis is identified with the center line of the pipe.

The equation of continuity is expressed by

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

where  $r$  is radius and  $u, v$  are velocity components in  $x$  and  $r$  directions respectively. In this equation component of twisting flow is first omitted.

Neglecting external forces two components of NAVIER-STOKES' equation in a symmetrical flow are referring to the cylindrical coordinates

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (3)$$

If the flow direction is assumed to be parallel to the  $x$  axis, velocity has  $x$  direction only and  $v$  is vanished. The equation of continuity gives

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

or

$$u = u(r, t)$$

which indicates the velocity to be constant in the direction parallel to the center line. This property may be acceptable for the fully developed laminar flow of liquids.

Substituting  $v = 0$  into (3)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

is reduced. It shows that the pressure is constant across the section of pipe and becomes only function of  $x$  and  $t$ .

With these relations equation of motion (2) is converted into

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (6)$$

### 3. Solution of Uniform Pulsating Flow

In the uniform pulsating flow, where  $\partial u / \partial x = 0$ , pressure gradient becomes only function of  $t$  with the aid of (4), (5) and (6) and will be able to express by Fourier series as follows

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{cn} \cos n t + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_{sn} \sin n t \quad (7)$$

or, for the sake of simplicity in calculation, complex form

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n e^{int}, \quad \kappa_n = \kappa_{cn} - i \kappa_{sn} \quad (8)$$

is introduced, where  $\kappa_{cn}$  and  $\kappa_{sn}$  are constants representing the amplitudes of elemental vibrations.

As the corresponding solution following expression of Fourier series will be assumed

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{cn} \cos n t + \sum_{n=1}^{\infty} u_{sn} \sin n t \quad (9)$$

or in complex form

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{int}, \quad u_n = u_{cn} - i u_{sn} \quad (10)$$

is assumed, where coefficients  $u_{cn}$  and  $u_{sn}$  are functions of  $r$  only.

Substituting (8) and (10) into (6) and comparing the terms of same family, differential equations for the coefficients are

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{\nu} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_n}{dr} + \frac{-i n}{\nu} u_n + \frac{\kappa_n}{\nu} = 0. \quad (12)$$

Integrations are given by

$$u_0 = -\frac{\kappa_0}{\nu} \cdot \frac{r^2}{4} + A_0 \log_e r + B_0, \quad (13)$$

$$u_n = \frac{\kappa_n}{i n} + D_n J_0(k r i^{3/2}) + E_n K_0(k r i^{1/2}) \quad (14)$$

where  $k = \sqrt{n/\nu}$  and  $J_0$  and  $K_0$  are first and second solutions of Bessel function of zero order respectively. The solution is given by the real part of the following expression

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\kappa_0}{\nu} \cdot \frac{r^2}{4} + A_0 \log_e r + B_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\kappa_n}{i n} + D_n J_0(k r i^{3/2}) + E_n K_0(k r i^{1/2}) \right] e^{i \beta t}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

At the axis of the pipe  $r = 0$  but  $|\log_e r|$  and  $K_0(k r i^{1/2})$  is infinite, and since  $u$  is finite  $A_0 = E_n = 0$ .

Boundary condition given at the wall is

$$u = 0 \quad \text{at} \quad r = a \quad (16)$$

where  $a$  is the radius of pipe.

Unknown coefficient in (15) is determined by (16), and the last form of solution is given by

$$u = \frac{\kappa_0}{4 \nu} (a^2 - r^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \kappa_n}{n} \left[ 1 - \frac{J_0(k r i^{3/2})}{J_0(k a i^{3/2})} \right] e^{i n t}. \quad (17)$$

Total mean mass-flow  $G$ , which is transmitted in the  $x$  direction, is given by

$$G = \frac{1}{2 \pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^a 2 \pi u r dr = \frac{\pi a^4 \kappa_0}{8 \nu} \quad (18)$$

or

$$G = \frac{\pi a^4}{8 \mu} \left( -\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \right) \quad (18')$$

where  $\overline{(-\partial p / \partial x)} = \rho \kappa_0$  represents time mean of pressure gradient. It is found that the total mean mass-flow in pulsating motion is identified with the steady Poiseuille flow subjecting the same amount of pressure gradient as the mean pressure gradient in the pulsating flow.

The total mean velocity  $U$  defined by  $U = G / (\pi a^2)$  is

$$U = \frac{a^2 \kappa_0}{8 \nu} = \frac{a^2}{8 \mu} \left( -\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \right). \quad (19)$$

Taking  $U$  as the standard of velocity, non-dimensional expression of velocity is obtained from (17) as follows.

$$\frac{u}{U} = \frac{u_s}{U} + \frac{u'}{U}, \quad \frac{u_s}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad (20)$$

$$\frac{u'}{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8B}{(ka)^2} \cos nt + \frac{8(1-A)}{(ka)^2} \sin nt \right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8B}{(ka)^2} \sin nt - \frac{8(1-A)}{(ka)^2} \cos nt \right\}$$

where

$$A = \frac{\operatorname{ber} k a \operatorname{ber} k r + \operatorname{bei} k a \operatorname{bei} k r}{\operatorname{ber}^2 k a + \operatorname{bei}^2 k a}, \quad B = \frac{\operatorname{bei} k a \operatorname{ber} k r - \operatorname{ber} k a \operatorname{bei} k r}{\operatorname{ber}^2 k a + \operatorname{bei}^2 k a} \quad (21)$$

Corresponding pressure gradients is given with the aid of (8) and (19).

$$-\frac{2a}{\varrho U^2/2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{64}{Re} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \sin nt \right] \quad (22)$$

where  $Re$  is the mean Reynolds' number of pipe defined by

$$Re = \frac{2aU}{\nu}. \quad (23)$$

$\kappa_{cn}/\kappa_0$  and  $\kappa_{sn}/\kappa_0$  are ratios of amplitude of periodic variation of pressure gradients to that of average one.

If any variation of pressure gradient is given by the form dissolved into Fourier series, the corresponding velocities can be calculated by (20).

#### 4. Velocity Distribution and Its Asymptotic Expressions

Periodical part of velocity distribution is characterized by the parameter  $\sqrt{n/\nu} a$ . Forms of solution in extreme cases are easily obtained by the asymptotic expansions of Bessel function.

$$\text{Slow vibration: } \sqrt{n/\nu} a \ll 1.$$

When high viscous liquid pulsate slowly in a narrow pipe, parameter  $\sqrt{n/\nu} a$  becomes sufficiently small that approximately  $\operatorname{ber} k a \rightarrow 1$ ,  $\operatorname{bei} k a \rightarrow 0$ . (20) is transformed into

$$\frac{u}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \sin nt \right]$$

$$= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{1}{\kappa_0} \left[ -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (24)$$

<sup>3)</sup> Editor's Note: ber and bei signify Kelvin Functions; cf. e.g. *Higher Transcendental Functions*, vol. 2, p. 6 (McGraw-Hill, New York 1953).

or

$$u = \frac{1}{4\nu} (a^2 - r^2) \left[ -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (24')$$

The velocity distribution is given by a parabola as in the case of steady Poiseuille flow, while the magnitude of velocity varies periodically in the same phase with that of pressure gradient.

Rapid vibration:  $\sqrt{n/\nu} a \rightarrow \infty$ .

When low viscous liquid pulsate rapidly in a large pipe, parameter  $\sqrt{n/\nu} a$  becomes very high so that  $\sqrt{n/\nu} a > 10$ , then asymptotic expansion

$$\begin{aligned} \text{ber } k a &= \frac{e^{ka/2}}{\sqrt{2\pi k a}} \left\{ \cos\left(\frac{ka}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + O\left(\frac{1}{ka}\right) \right\}, \\ \text{beik } a &= \frac{e^{ka/2}}{\sqrt{2\pi k a}} \left\{ \sin\left(\frac{ka}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) + O\left(\frac{1}{ka}\right) \right\} \end{aligned}$$

can be used.

Motion near the center of pipe will be given by putting  $ka \rightarrow \infty, kr \rightarrow 0$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \sin nt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \cos nt \\ &= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \sin\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

or

$$u = \frac{\kappa_0}{4\nu} (a^2 - r^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{n} \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{n} \sin\left(nt - \frac{\pi}{2}\right). \quad (25')$$

In the rapid pulsation, fluid flows at the center of pipe with the phase lag of  $90^\circ$  from the wave of pressure gradient and its amplitude diminishes with increasing frequency.

Motion near the wall will be given by putting  $kr \rightarrow ka \rightarrow \infty$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \\ &\quad \times \left[ \sin nt - \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-k(a-r)/\sqrt{2}} \sin\left\{nt - \frac{k}{\sqrt{2}}(a-r)\right\} \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(ka)^2} \\ &\quad \times \left[ -\cos nt + \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-k(a-r)/\sqrt{2}} \cos\left\{nt - \frac{k}{\sqrt{2}}(a-r)\right\} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

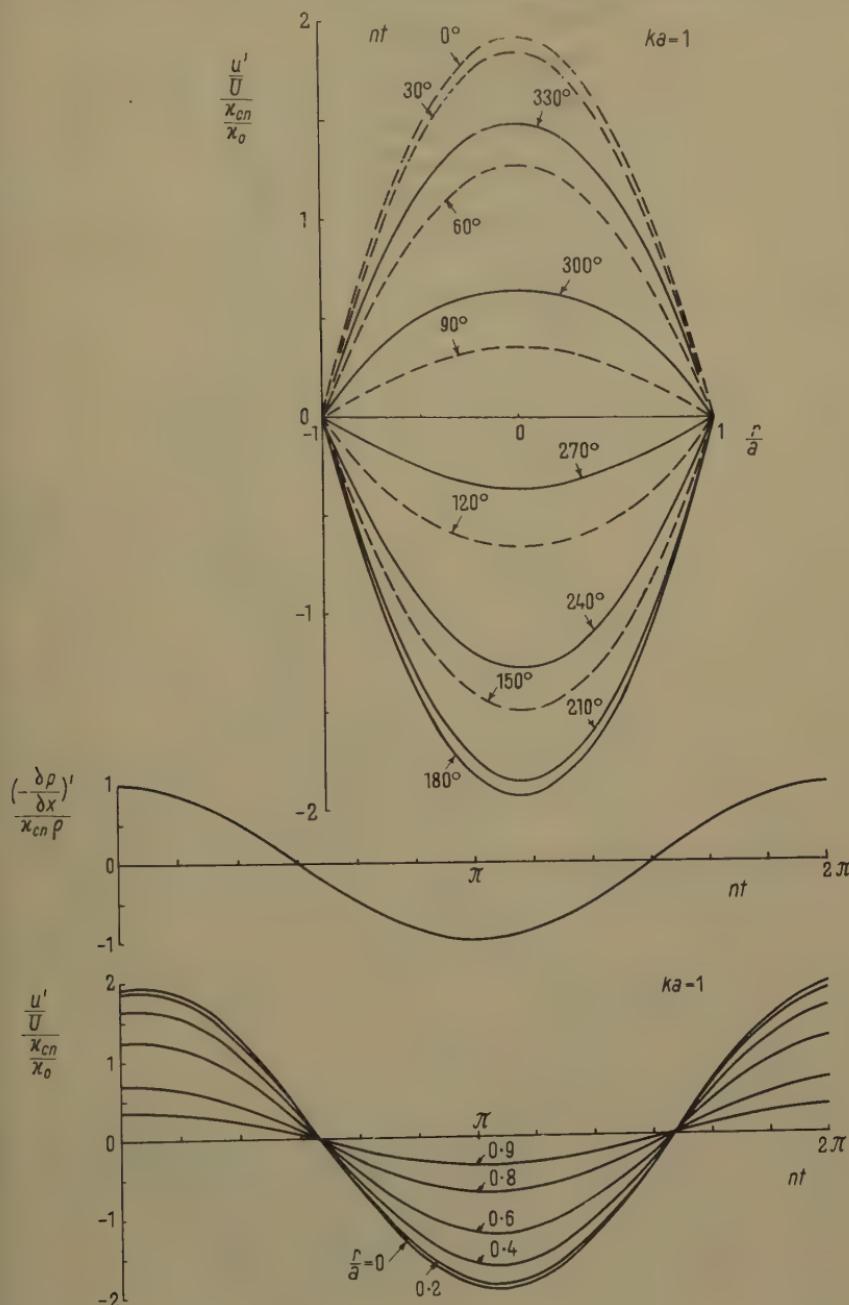


Figure 1  
Velocity profile for  $ka = 1$ .

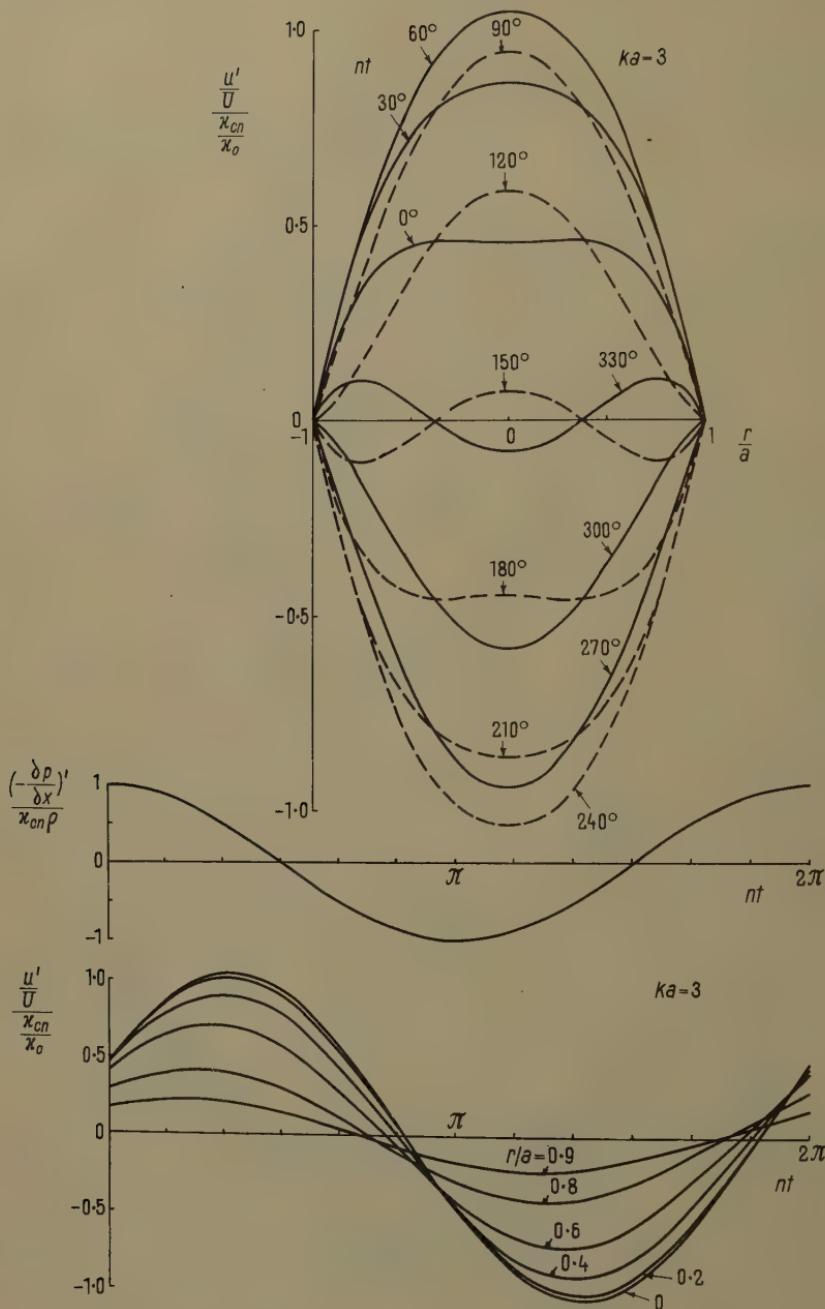


Figure 2  
Velocity profile for  $k\alpha = 3$ .

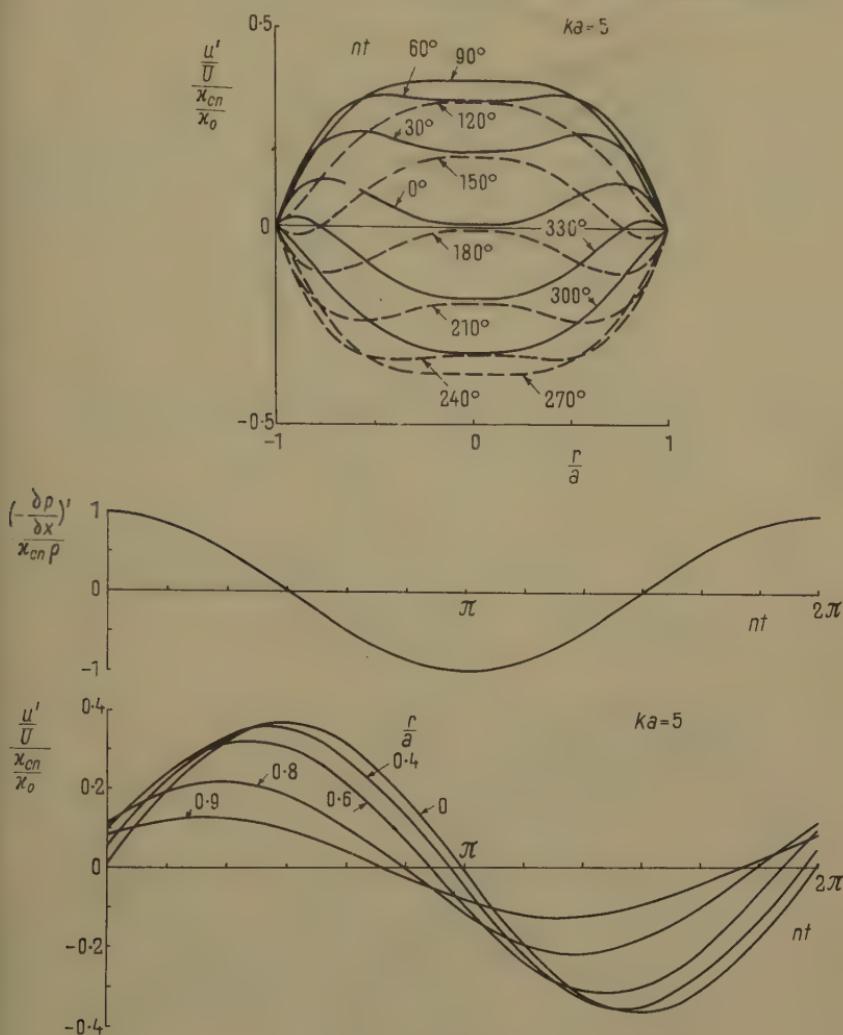


Figure 3  
Velocity profile for  $k\alpha = 5$ .

It will be found that maximums of velocity distribution exist in the neighbourhood of wall in the rapid vibration.

Several examples for the simple periodic pulsation given by

$$-\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \kappa_{en} \cos nt = \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)' , \quad \left. \right\} \quad (27)$$

where

$$\frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \kappa_0 , \quad \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)' = \kappa_{en} \cos nt \quad \left. \right\}$$

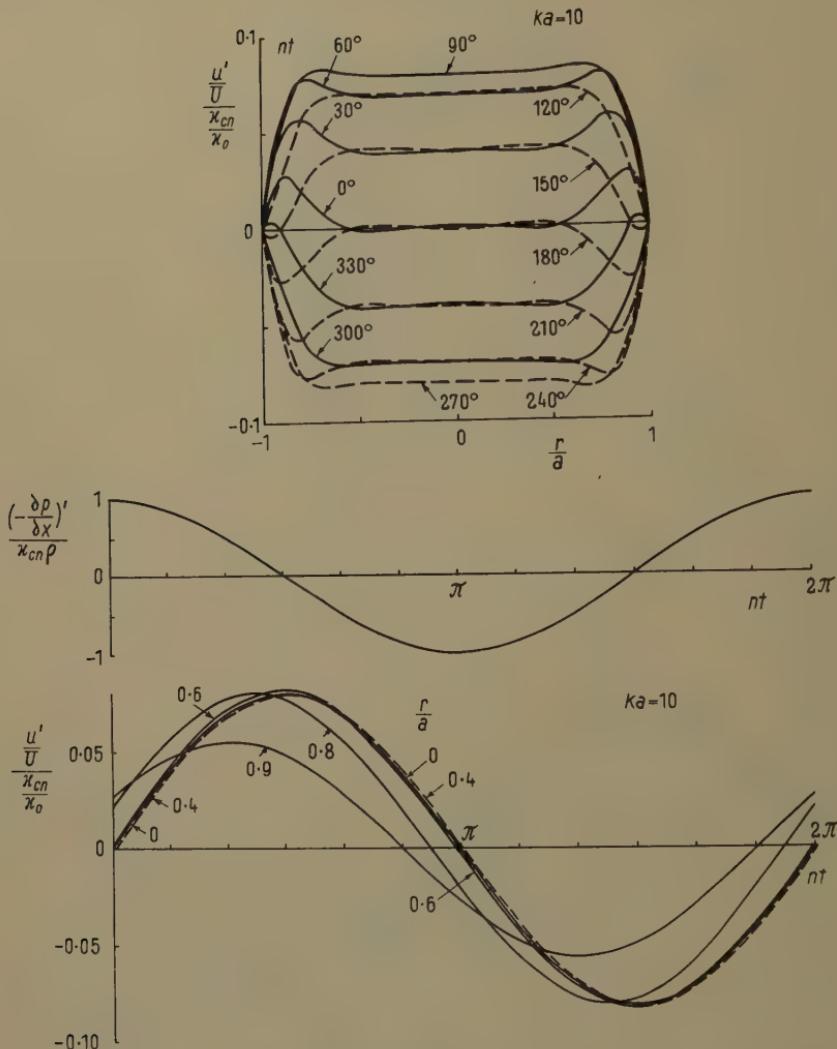


Figure 4  
Velocity profile for  $ka = 10$ .

are shown in Figure 1 through Figure 4, in which

$$\frac{u}{U} = \frac{u_s}{U} + \frac{u'}{U} \quad (28)$$

where

$$\frac{u_s}{U} = 2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad \frac{u'}{U} = \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8B}{(ka)^2} \cos nt + \frac{8(1-A)}{(ka)^2} \sin nt \right\}.$$

### 5. Sectional Mean Velocity

Instantaneous mass of flow and accordingly sectional mean velocity are also changed periodically, and to study the relation with pressure gradient will be significant for the practical use. Sectional mean velocity denoted by  $u_m$  is given by

$$u_m = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi u r dr$$

or

$$\frac{u_m}{U} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \left\{ \frac{2D}{ka} \cos nt + \left(1 - \frac{2C}{ka}\right) \sin nt \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \left\{ \frac{2D}{ka} \sin nt - \left(1 - \frac{2C}{ka}\right) \cos nt \right\} \quad (29)$$

where using the notation

$$\text{ber}' k a = \frac{d(\text{ber} k a)}{d(k a)}, \quad \text{bei}' k a = \frac{d(\text{bei} k a)}{d(k a)}$$

and

$$C = \frac{\text{ber} k a \text{ bei}' k a - \text{bei} k a \text{ ber}' k a}{\text{ber}^2 k a + \text{bei}^2 k a}, \quad (30)$$

$$D = \frac{\text{ber} k a \text{ ber}' k a + \text{bei} k a \text{ bei}' k a}{\text{ber}^2 k a + \text{bei}^2 k a}.$$

Table 1  
Coefficients for Calculating Mean Velocity

$ka$	$\frac{8}{(k a)^2} \left\{ 1 - \frac{2C}{ka} \right\}$	$\frac{8}{(k a)^2} \cdot \frac{2D}{ka}$	$ka$	$\frac{8}{(k a)^2} \left\{ 1 - \frac{2C}{ka} \right\}$	$\frac{8}{(k a)^2} \cdot \frac{2D}{ka}$
0	0	1.0000	2.4	0.4856	0.5220
0.2	0.0067	1.0000	2.8	0.4661	0.3779
0.4	0.0266	0.9992	3.2	0.4208	0.2710
0.6	0.0598	0.9962	3.6	0.3696	0.1966
0.8	0.1000	0.9888	4.0	0.3215	0.1460
1.0	0.1680	0.9744	5.0	0.2291	0.0773
1.2	0.2250	0.9444	6.0	0.1696	0.0460
1.4	0.2935	0.9013	7.0	0.1302	0.0296
1.6	0.3563	0.8434	8.0	0.1029	0.0201
1.8	0.4113	0.7713	9.0	0.0832	0.0143
2.0	0.4516	0.6900	10.0	0.0707	0.0105

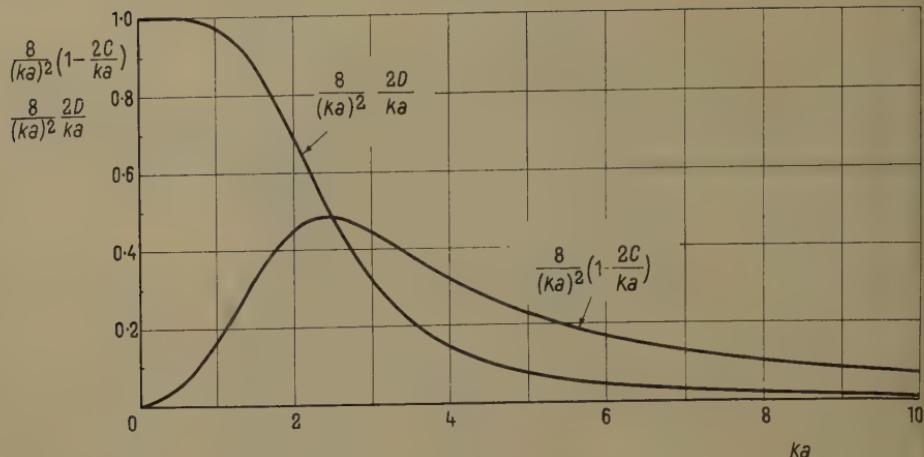


Figure 5  
Coefficients for calculating mean velocity.

The values of coefficients

$$\frac{8}{(k a)^2} \left\{ 1 - \frac{2 C}{k a} \right\} \quad \text{and} \quad \frac{8}{(k a)^2} \cdot \frac{2 D}{k a}$$

are shown in Table 1 and Figure 5.

In a simple periodic pulsation produced by (27), (29) is reduced to

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_m}{U} &= 1 + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \left\{ \frac{2 D}{k a} \cos n t + \left(1 - \frac{2 C}{k a}\right) \sin n t \right\} \\ &= 1 + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \cdot \frac{8}{(k a)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{2 C}{k a}\right)^2 + \left(\frac{2 D}{k a}\right)^2} \cos(n t - \delta_u) \\ &= 1 + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \sigma_u \cos(n t - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

where

$$\sigma_u = \frac{8}{(k a)^2} \sqrt{\left(1 - \frac{2 C}{k a}\right)^2 + \left(\frac{2 D}{k a}\right)^2} \quad (32)$$

is the coefficient of amplitude and

$$\delta_u = \tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \frac{2 C}{k a}}{\frac{2 D}{k a}} \right\} \quad (33)$$

represents the phase lag to the wave of pressure gradient. Several examples are shown in Figures 6 and 7.

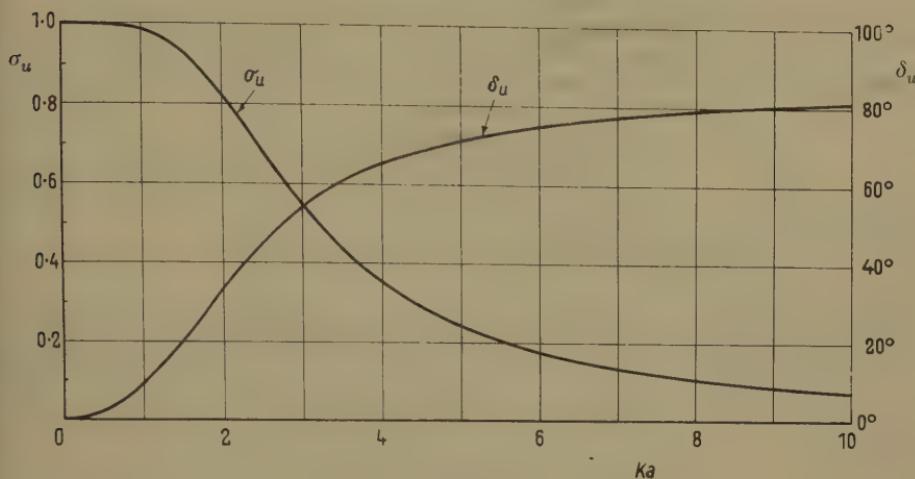


Figure 6  
Coefficients of amplitude and phase lag of mean velocity.

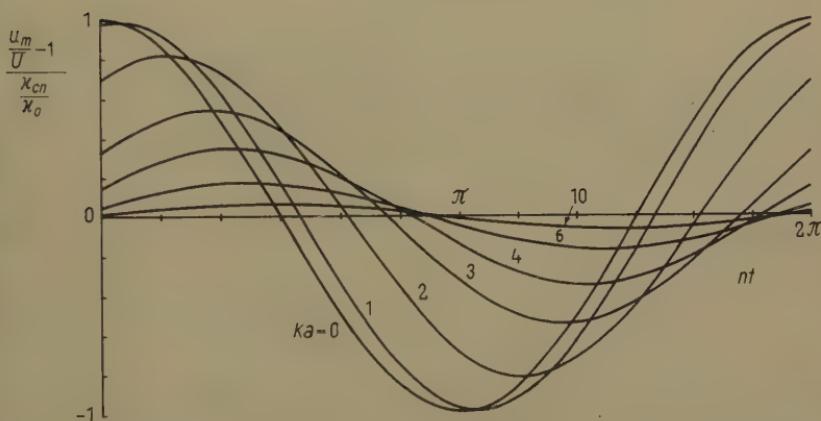


Figure 7  
Sectional mean velocity (periodic components).

## 6. Surface Friction and Balance of Force

Instantaneous frictional force acting on the wall is given by

$$\tau = -\mu \left( \frac{du}{dr} \right)_{r=a}$$

or

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{\rho U^2/2} &= \frac{16}{Re} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \left\{ \frac{2C}{ka} \cos nt + \frac{2D}{ka} \sin nt \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{2C}{ka} \sin nt - \frac{2D}{ka} \cos nt \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

where  $C$  and  $D$  are given by (30).

In a simple periodic pulsation produced by (27)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{\rho U^2/2} &= \frac{16}{Re} \left[ 1 + \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \left\{ \frac{2C}{ka} \cos nt + \frac{2D}{ka} \sin nt \right\} \right] \\ &= \frac{16}{Re} \left[ 1 + \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \sigma_{\tau} \cos(nt - \delta_{\tau}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

where

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\left(\frac{2C}{ka}\right)^2 + \left(\frac{2D}{ka}\right)^2} \quad (36)$$

represents the coefficient of amplitude of shearing stress at the wall and

$$\delta_{\tau} = \tan^{-1} \frac{D}{C} \quad (37)$$

the phase lag from the wave of pressure gradient (Figure 8).

It will be interesting that the phase of sectional mean velocity is much delayed from the pulsating wave of pressure gradient while that of shearing stress is less delayed from it.

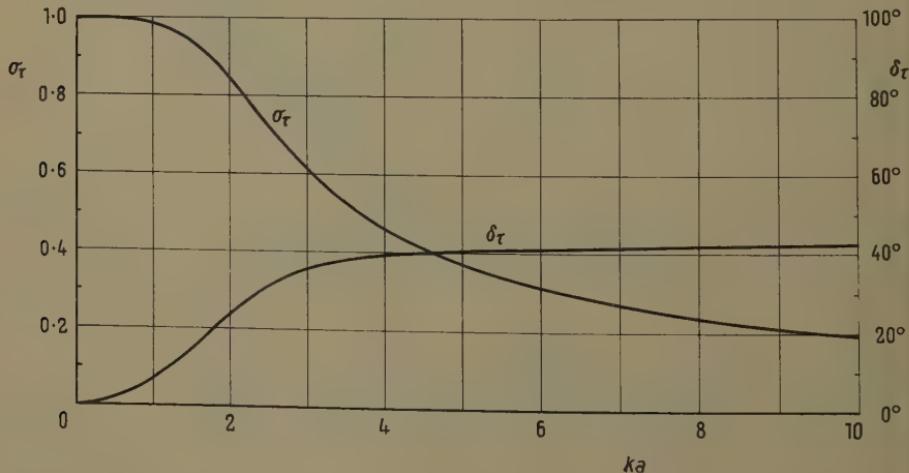


Figure 8  
Coefficients of amplitude and phase lag of shearing stress.

If (6) is integrated over the section of pipe by multiplying  $2\pi\varrho r dr$  and integrating from  $r = 0$  to  $r = a$ , the relation of balance of force and acceleration of mass enclosed in the circular cylinder of unit length is obtained as follows:

$$-\pi a^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \pi a^2 \varrho \frac{du_m}{dt} + 2\pi a \tau$$

or

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-\partial p/\partial x}{(\varrho U^2/2)/2a} = \frac{du_m/dt}{U^2/2a} + \frac{2\tau}{\varrho U^2/2}. \quad (38)$$

The present solution can easily check this relation, in which mean frictional force involved in  $\tau$  is just balanced by the term of mean pressure gradient and there are no steady acceleration in this case. An example indicating the balance of force in periodic component is shown in Figure 9.

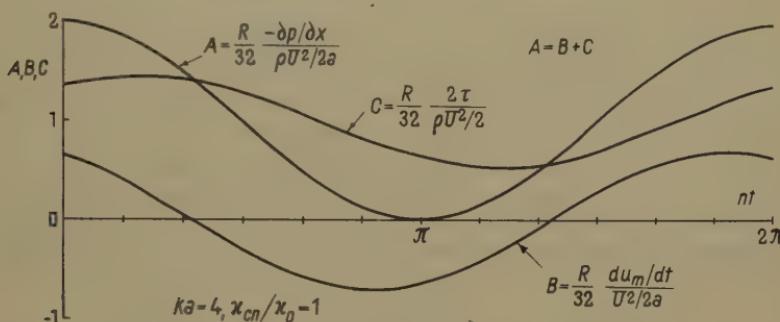


Figure 9

Balance of periodic force component (A pressure gradient; B acceleration; C searing force).

## 7. Total Work and Dissipation of Energy

Considering the fluid in the volume  $V$  within the closed surface  $S$ , forces acting on this mass of fluid are the external force, the normal pressure on the boundary and the viscous stress. The rate at which these do work on the element is denoted by  $W_e$ . It is generally proved that this rate of work done from the exterior equals to the sum of the rate of increase of the kinetic energy and the rate of dissipation of energy due to internal friction. For example, by MILNE-THOMSON [4] it is expressed as follows.

$$W_e = \frac{dT}{dt} + W_i \quad (39)$$

where  $T$  is the kinetic energy and  $W_i$  is the rate of dissipation of energy in the

volume  $V$ . The latter is given by

$$W_i = \mu \int_V \zeta^2 dV + 2 \mu \int_S \left\{ \mathbf{n} (\mathbf{q} \wedge \boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}^2}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS \quad (40)$$

where  $\mathbf{q}$  and  $\boldsymbol{\xi}$  represent the velocity and the vorticity vector respectively and  $\mathbf{n}$  is the unit inward normal to  $dS$ . When the fluid is enclosed within fixed boundaries at which  $\mathbf{q} = 0$  as in this case the rate of dissipation is given by

$$W_i = \mu \int_V \zeta^2 dV. \quad (41)$$

In the cylindrical coordinates  $x, r$  and  $\varphi$ , corresponding components of velocity to whom are  $u, v$  and  $w$  respectively,

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{r} \left[ \left\{ \frac{\partial(rw)}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} \mathbf{i}_x + \left\{ \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rw)}{\partial x} \right\} \mathbf{i}_r + r \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \mathbf{i}_\varphi \right].$$

If the circular cylinder of radius  $a$  with unit length is chosen as the volume  $V$ ,  $W_i$  in the present case is given by

$$W_i = 2\pi \mu \int_0^a \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr. \quad (42)$$

Equation (39) can be easily reduced in this case by multiplying  $2\pi \rho u r dr$  to the equation of motion (6) and integrating from  $r = 0$  to  $r = a$ , giving

$$\pi a^2 u_m \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2\pi \int_0^a \frac{\partial(\rho u^2/2)}{\partial t} r dr + 2\pi \mu \int_0^a \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr \quad (43)$$

where the work done from the exterior is

$$W_e = \pi a^2 u_m \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (44)$$

and the rate of increase of kinetic energy is

$$W_k = 2\pi \int_0^a \frac{\partial(\rho u^2/2)}{\partial t} r dr. \quad (45)$$

The last term of (43) represents the rate of energy dissipation as shown by (42).

It will be much interesting to compare the total mean work necessary for transmission of fluid by pulsating flow with the necessary work in steady flow. The total mean work or change of energy concerning (42), (44) and (45) are defined by

$$\overline{W}_{e,k,i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_{e,k,i} dt. \quad (46)$$

Substituting the previous solution into (46) with the aid of (42), (44) and (45), the total mean work from the exterior, the total mean change of kinetic energy and the total mean dissipation of energy are respectively

$$W_e = 8\pi\mu U^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \right)^2 + \left( \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \right)^2 \right\} \frac{8D}{(ka)^3} \right], \quad (47)$$

$$W_k = 0, \quad (48)$$

$$W_i = 8\pi\mu U^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\kappa_{en}}{\kappa_0} \right)^2 + \left( \frac{\kappa_{sn}}{\kappa_0} \right)^2 \right\} \frac{8D}{(ka)^3} \right] \quad (49)$$

where

$$D = \frac{\operatorname{ber} k a \operatorname{ber}' k a + \operatorname{bei} k a \operatorname{bei}' k a}{\operatorname{ber}^2 k a + \operatorname{bei}^2 k a}. \quad (30)$$

Formula (48) shows that the kinetic energy changes instantaneously with the relation of 'give and take' among other forms of energy but as a total it causes no loss of energy. Energy loss is caused by the dissipation as shown in (49) and it will be interesting that the amount of energy dissipation is increased by the existence of components of periodic motion. In this respect, there will be no advantages to send mass of fluid by pulsating motions.

The relation given from (47) and (49),

$$\bar{W}_e = \bar{W}_i \quad (50)$$

shows that pressure gradient does works equal to the loss of energy after full cycle of motions.

When the pulsation is extremely slow and  $ka$  tends to zero, the coefficient of excess work is

$$\frac{8D}{(ka)^3} = \frac{1}{2}. \quad (51)$$

The value  $1/2$  will not be strange, because in this case phases of pressure gradient and mean sectional velocity  $u_m$  tend to identify.

In the extremity of rapid pulsation where  $ka \rightarrow \infty$

$$\frac{8D}{(ka)^3} = 0. \quad (52)$$

In the pulsating motion with very high frequency under finite amplitude, however, compressibility of fluid will not be negligible and the present theory might not be valid.

The value of coefficient of excess work for periodic motion is given in Table 2 and Figure 10.

Table 2  
Coefficient of Excess Work for Maintaining Periodic Motion

$k a$	$\frac{8 D}{(k a)^3}$						
0	0.5000	1.2	0.4722	2.4	0.2610	6.0	0.0230
0.2	0.5000	1.4	0.4507	2.8	0.1890	7.0	0.0148
0.4	0.4996	1.6	0.4217	3.2	0.1355	8.0	0.0101
0.6	0.4981	1.8	0.3857	3.6	0.0983	9.0	0.0071
0.8	0.4944	2.0	0.3450	4.0	0.0730	10.0	0.0053
1.0	0.4872			5.0	0.0386		

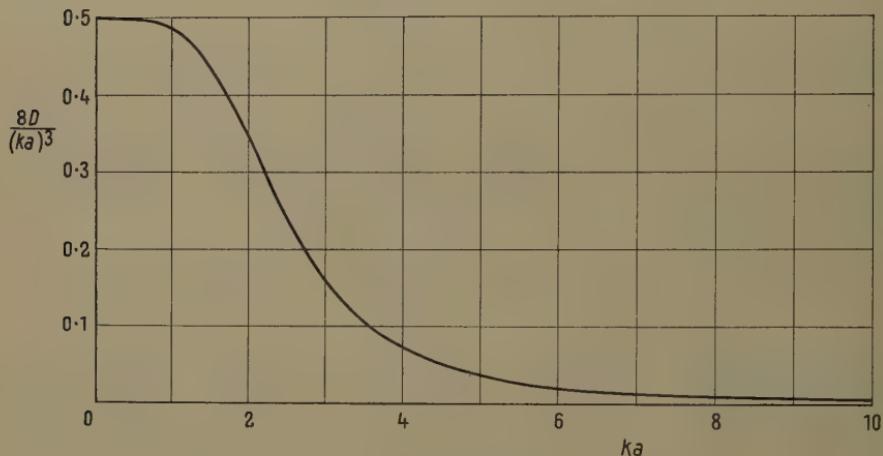


Figure 10  
Coefficient of excess work for maintaining periodic motion.

### 8. Distribution of the Dissipation of Energy

The local distribution of dissipation of energy is given by

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{W}_i &= \mu \zeta^2 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\
 &= \frac{\mu U^2}{a^2} \left[ -4 \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{cn}}{\varkappa_0} \left\{ \frac{8 B'}{k a} \cos n t - \frac{8 A'}{k a} \sin n t \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa_{sn}}{\varkappa_0} \left\{ \frac{8 B'}{k a} \sin n t + \frac{8 A'}{k a} \cos n t \right\} \right]^2
 \end{aligned} \quad (53)$$

where

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\operatorname{ber} k a \operatorname{ber}' k r + \operatorname{bei} k a \operatorname{bei}' k r}{\operatorname{ber}^2 k a + \operatorname{bei}^2 k a}, \\ B' &= \frac{\operatorname{bei} k a \operatorname{ber}' k r - \operatorname{ber} k a \operatorname{bei}' k r}{\operatorname{ber}^2 k a + \operatorname{bei}^2 k a}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

In a simple periodic pulsation produced by the condition

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \kappa_0 + \kappa_{cn} \cos nt \quad (27)$$

the distribution of energy dissipation is simplified as follows

$$\mathfrak{W}_i = \frac{\mu U^2}{a^2} \left[ -4 \frac{r}{a} + \frac{\kappa_{cn}}{\kappa_0} \left\{ \frac{8 B'}{k a} \cos nt - \frac{8 A'}{k a} \sin nt \right\} \right]^2. \quad (55)$$

As shown in some examples given by Figures 11 and 12, dissipations are fluctuated periodically around the component of steady flow given by

$$\mathfrak{W}_{is} = \frac{\mu U^2}{a^2} 16 \left( \frac{r}{a} \right)^2. \quad (56)$$

When the amplitude ratio of pulsating pressure gradient to steady one,  $\kappa_{cn}/\kappa_0$ , is not large, the maximum value of dissipation is occurred at the wall of pipe. With the increase of amplitude ratio  $\kappa_{cn}/\kappa_0$ , the situation of maximum dissipation moves into flowing liquid and its distance from the wall is varied periodically with the time as shown in Figure 12. These phenomena will be interesting, if connections can be made with the mechanism of generation of turbulence.

#### REFERENCES

- [1] E. G. RICHARDSON, Proc. phys. Soc. Lond. 40, 206 (1928).
- [2] T. SEXL, Z. Phys. 61, 349 (1930).
- [3] E. G. RICHARDSON, and E. TYLER, Proc. phys. Soc. Lond. 42, 1 (1929-30).
- [4] L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, London 1938), p. 513.

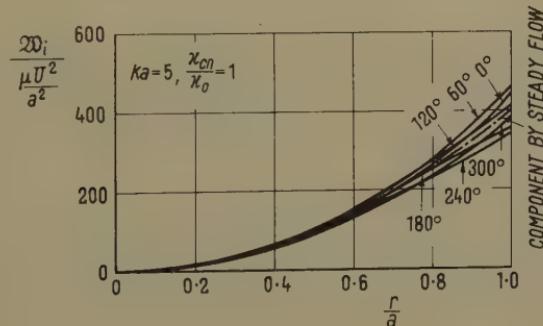


Figure 11

Distribution of energy dissipation (small amplitude of periodic component).

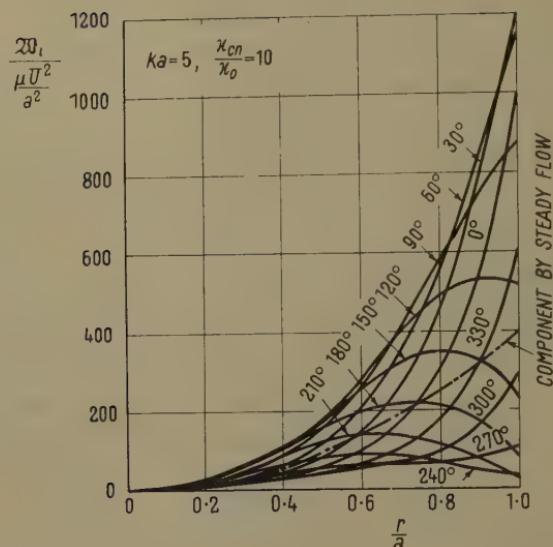


Figure 12

Distribution of energy dissipation (large amplitude of periodic component).

### Zusammenfassung

Eine exakte Lösung der pulsierenden laminaren Strömung in einem Kreisrohr wird angegeben mit der Annahme, dass die Richtung dem Geschwindigkeitsvektor der Rohrachse parallel ist. Die Durchflussmenge stimmt überein mit der aus den stationären Druckgefällekponenten gerechneten Menge. Für die Erhaltung der Bewegung dagegen ist die der Dissipation entsprechende Extraarbeit notwendig. Die Quantität dieser Arbeit hängt ab von den Frequenzen der Stromschwingungen.

(Received: December 14, 1955.)

## Geschichteter Kreiszylinder im Felde periodischer Temperaturschwankungen

Von VÁCLAV VODIČKA, Pilsen, CSR<sup>1)</sup>

Die rechnerische Behandlung der Wärmewellen in homogenen isotropen Körpern ist ein technisch wichtiges, wenn auch mathematisch nicht zu schwieriges Problem<sup>2)</sup>. Viel komplizierter ist die Rechnung für einen mehrschichtigen

<sup>1)</sup> Technische Hochschule.

<sup>2)</sup> VODIČKA, V., Schweiz. Arch. angew. Wiss. Tech. 6, 177 (1948); Appl. Sci. Res. [A] 5, 268 (1955); Appl. Sci. Res. [A] 5, 327 (1955).

Körper, wie weiter an dem Fall eines unendlich langen hohlen Kreiszylinders gezeigt werden wird.

1. Problemstellung. Ein beiderseitig unendlich langer Zylinderkörper besteht aus  $n$  homogenen und isotropen koaxialen Schichten, deren  $k$ -te die physikalischen Konstanten  $\lambda_k, c_k, \gamma_k$  hat und von den Flächen  $\varrho = \varrho_k, \varrho = \varrho_{k+1}$  begrenzt ist. Die beiden Körperoberflächen  $\varrho = \varrho_1, \varrho = \varrho_{n+1}$  sind den Temperaturschwankungen  $b e^{i\omega t}, B e^{i\Omega t}$  ausgesetzt ( $b, B, \omega, \Omega$  sind positive Festwerte), und man fragt nach dem Verlauf des Temperaturfeldes  $u_k = u_k(\varrho, t)$  in einzelnen Schichten, wenn überall mit Wärmeübergang gerechnet werden wird.

Mit üblicher Bezeichnungsweise drückt sich unser Problem wie folgt aus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} &= a_k^2 \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \varrho} \right), \quad a_k^2 = \frac{\lambda_k}{c_k \gamma_k} \\ (\varrho_k < \varrho < \varrho_{k+1}, t > 0; k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} - h (u_1 - b e^{i\omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_1, t > 0), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \varrho} + h_k (u_k - u_{k+1}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_{k+1}, t > 0; k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varrho} + h'_k (u_k - u_{k+1}) &= 0, \quad h'_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} h_k \\ (\varrho = \varrho_{k+1}, t > 0; k = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \varrho} + H (u_n - B e^{i\Omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_{n+1}, t > 0). \quad (4)$$

Die  $h, h_k, H$  sind gegebene positive Konstanten.

2. Reduktion auf zwei Teilprobleme. Unsere Aufgabe lässt sich bekannterweise dadurch in zwei einfachere Teilprobleme zerspalten, dass man

$$u_k = v_k + w_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

setzt. Sowie alle  $v_k(\varrho, t)$  als auch alle  $w_k(\varrho, t)$  genügen dabei dem Gleichungssystem (1) und den Forderungen (3.1), (3.2), während die anderen Bedingungen sich folgendermassen gestalten:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho} - h (v_1 - b e^{i\omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_1); \quad \frac{\partial v_n}{\partial \varrho} + H v_n = 0 \quad (\varrho = \varrho_{n+1}; t > 0), \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \varrho} - h w_1 = 0 \quad (\varrho = \varrho_1); \quad \frac{\partial w_n}{\partial \varrho} + H (w_n - B e^{i\Omega t}) = 0 \quad (\varrho = \varrho_{n+1}; t > 0). \quad (7)$$

3. Integrale von (1) mit Rücksicht auf (3.1), (3.2). Die Lösung von (1) wird mit noch freien Parametern  $\mu_k$  und mit den Integrationskonstanten

$B_k, C_k$  in der Form

$$f_k(\varrho, t) = [B_k I_0(\varrho \sqrt{\mu_k}) + C_k K_0(\varrho \sqrt{\mu_k})] e^{a_k^2 \mu_k t} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

angesetzt;  $I_0, K_0$  sind modifizierte Zylinderfunktionen.

Geht man mit (8) in (3.1) und (3.2) ein, so folgt erstens

$$\mu_k = A_k^2 \mu, \quad A_k = \frac{a_1}{a_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9.1)$$

und zweitens das in  $B_k, C_k$  lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} I_0(\alpha_k \zeta_k) B_{k+1} + K_0(\alpha_k \zeta_k) C_{k+1} \\ = \left[ I_0(\zeta_k) + \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} I_1(\zeta_k) \right] B_k + \left[ K_0(\zeta_k) - \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} K_1(\zeta_k) \right] C_k, \\ \left[ I_0(\alpha_k \zeta_k) - \frac{\alpha_k \zeta_k}{h_k' \varrho_{k+1}} I_1(\alpha_k \zeta_k) \right] B_{k+1} \\ + \left[ K_0(\alpha_k \zeta_k) + \frac{\alpha_k \zeta_k}{h_k' \varrho_{k+1}} K_1(\alpha_k \zeta_k) \right] C_{k+1} = I_0(\zeta_k) B_k + K_0(\zeta_k) C_k, \\ \alpha_k = \frac{A_{k+1}}{A_k}, \quad \zeta_k = \zeta_k(\mu) = A_k \varrho_{k+1} \sqrt{\mu} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

womit wir uns jetzt eingehender befassen wollen;  $I_1, K_1$  sind Macdonaldsche Funktionen mit dem Index 1.

Schreibt man (9.2) in Form der Matrizengleichungen

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} B_{k+1} \\ C_{k+1} \end{vmatrix} &= \alpha_k \zeta_k M_k(\mu) \begin{vmatrix} B_k \\ C_k \end{vmatrix}, \quad M_k(\mu) = \| m_k^{(rs)}(\mu) \| \\ m_k^{(11)}(\mu) &= \frac{h_k'}{\alpha_k h_k} I_1(\zeta_k) K_0(\alpha_k \zeta_k) + K_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ I_0(\zeta_k) + \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} I_1(\zeta_k) \right], \\ m_k^{(12)}(\mu) &= -\frac{h_k'}{\alpha_k h_k} K_1(\zeta_k) K_0(\alpha_k \zeta_k) + I_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ K_0(\zeta_k) - \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} K_1(\zeta_k) \right], \\ m_k^{(21)}(\mu) &= -\frac{h_k'}{\alpha_k h_k} I_1(\zeta_k) I_0(\alpha_k \zeta_k) + I_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ I_0(\zeta_k) + \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} I_1(\zeta_k) \right], \\ m_k^{(22)}(\mu) &= \frac{h_k'}{\alpha_k h_k} K_1(\zeta_k) I_0(\alpha_k \zeta_k) + I_1(\alpha_k \zeta_k) \left[ K_0(\zeta_k) - \frac{\zeta_k}{h_k \varrho_{k+1}} K_1(\zeta_k) \right], \end{aligned} \right\}$$

so erhält man daraus sofort

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} B_{k+1} \\ C_{k+1} \end{vmatrix} &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k P_k(\mu) \begin{vmatrix} B_1 \\ C_1 \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ L_k &= \frac{\varrho_2 \varrho_3 \cdots \varrho_{k+1}}{a_2 a_3 \cdots a_{k+1}}, \quad P_k(\mu) = M_k(\mu) M_{k-1}(\mu) \cdots M_2(\mu) M_1(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

oder auch

$$\left. \begin{aligned} B_{k+1} &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k [\dot{p}_k^{(11)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(12)}(\mu) C_1], \\ C_{k+1} &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k [\dot{p}_k^{(21)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(22)}(\mu) C_1] \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (10.2)$$

worin allgemein

$$P_k(\mu) = \|\dot{p}_k^{(rs)}(\mu)\| \quad (r, s = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (10.3)$$

gesetzt worden ist.

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse (8) bis (10.3) führt zur Lösung

$$\left. \begin{aligned} f_1(\varrho, t) &= [B_1 I_0(\varrho \sqrt{\mu}) + C_1 K_0(\varrho \sqrt{\mu})] e^{a_1^2 \mu t}, \\ f_{k+1}(\varrho, t) &= (a_1^2 \mu)^{k/2} L_k \{ [\dot{p}_k^{(11)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(12)}(\mu) C_1] I_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\mu}) \\ &+ [\dot{p}_k^{(21)}(\mu) B_1 + \dot{p}_k^{(22)}(\mu) C_1] K_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\mu}) \} e^{a_1^2 \mu t} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} (11)$$

von (1), wobei für jeden Wert des Parameters  $\mu$  und der Integrationskonstanten  $B_1, C_1$  die Bedingungen (3.1) und (3.2) mitbefriedigt sind.

4. Lösung des ersten Teilproblems. Die Lösungsfunktionen  $v_k(\varrho, t)$  werden mit noch zu bestimmenden Größen  $\mu, B_1, C_1$  in der Form (11) angesetzt. Geht man damit in die letzten noch zu befriedigenden Gleichungen (6) ein, so folgt einerseits

$$\mu = \frac{i \omega}{a_1^2} \quad (12)$$

und andererseits ergibt sich mit diesem Werte von  $\mu$  und mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= q_{11}(\mu) = h I_0(\zeta_0) - \frac{\zeta_0}{\varrho_1} I_1(\zeta_0), \\ q_{12} &= q_{12}(\mu) = h K_0(\zeta_0) + \frac{\zeta_0}{\varrho_1} K_1(\zeta_0), \\ q_{21} &= q_{21}(\mu) = [H I_0(\zeta_n) + \frac{\zeta_n}{\varrho_{n+1}} I_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(11)}(\mu) \\ &+ [H K_0(\zeta_n) - \frac{\zeta_n}{\varrho_{n+1}} K_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(21)}(\mu), \\ q_{22} &= q_{22}(\mu) = [H I_0(\zeta_n) + \frac{\zeta_n}{\varrho_{n+1}} I_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(12)}(\mu) \\ &+ [H K_0(\zeta_n) - \frac{\zeta_n}{\varrho_{n+1}} K_1(\zeta_n)] \dot{p}_{n-1}^{(22)}(\mu), \\ \zeta_0 &= \zeta_0(\mu) = \varrho_1 \sqrt{\mu}, \quad \zeta_n = \zeta_n(\mu) = A_n \varrho_{n+1} \sqrt{\mu} \end{aligned} \right\} (13)$$

das Gleichungssystem

$$q_{11} B_1 + q_{12} C_1 = h b, \quad q_{21} B_1 + q_{22} C_1 = 0.$$

Einsetzung der daraus berechneten Werte von  $B_1, C_1$  in (11) führt dann mit der Bezeichnung

$$\Delta = q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} \quad (14)$$

zur folgenden Lösung des ersten Teilproblems:

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varrho, t) &= \frac{h b}{\Delta} [q_{22}(\mu) I_0(\varrho \sqrt{\mu}) - q_{21}(\mu) K_0(\varrho \sqrt{\mu})] e^{i \omega t}, \\ v_{k+1}(\varrho, t) &= \frac{h b}{\Delta} (i \omega)^{k/2} L_k \{ [q_{22}(\mu) p_k^{(11)}(\mu) - q_{21}(\mu) p_k^{(12)}(\mu)] I_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\mu}) \\ &\quad + [q_{22}(\mu) p_k^{(21)}(\mu) - q_{21}(\mu) p_k^{(22)}(\mu)] K_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\mu}) \} e^{i \omega t} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Schliesslich soll noch der zur effektiven Aufstellung der ausserordentlich komplizierten Lösungsformeln (15) nötige Weg zusammenfassend skizziert werden. Zuerst berechnen wir aus (3.2), (12), (9.1), (9.2) und (10.1) der Reihe nach die Grössen  $h'_k$ ,  $\mu$ ,  $A_k$ ,  $\alpha_k$  und  $L_k$ , worauf sich mit Hilfe von (9.2) und (13) auch die Werte von  $\zeta_0$ ,  $\zeta_k$  und  $\zeta_n$  ergeben. Der eigentliche Kern und zugleich auch die schwierigste Phase unseres Problems liegt jedoch in der Aufsuchung der Elemente  $p_k^{(rs)}(\mu)$  der durch (9.3) und (10.1) bestimmten Matrizen (10.3). Die Vorschrift (13) gibt dann die Werte  $q_{rs}(\mu)$ , und daraus berechnet man nach (14) die Determinante  $\Delta$ , womit alle zur Aufstellung von (15) nötigen Grössen und Ausdrücke vorbereitet sind.

5. Lösung des zweiten Teilproblems. Auch hier werden die gesuchten  $w_k(\varrho, t)$  in der Form (11) vorausgesetzt. Die Rechnung geht unter Berücksichtigung von (7) ganz analog vor sich wie im vorigen Falle und führt zur Lösung

$$\left. \begin{aligned} w_1(\varrho, t) &= \frac{H B}{\tilde{\Delta} L_{n-1}(i \Omega)^{(n-1)/2}} [-\tilde{q}_{12}(\tilde{\mu}) I_0(\varrho \sqrt{\tilde{\mu}}) + \tilde{q}_{11}(\tilde{\mu}) K_0(\varrho \sqrt{\tilde{\mu}})] e^{i \Omega t}, \\ w_{k+1}(\varrho, t) &= \frac{H B L_k(i \Omega)^{k/2}}{\tilde{\Delta} L_{n-1}(i \Omega)^{(n-1)/2}} \{ [-\tilde{q}_{12}(\tilde{\mu}) p_k^{(11)}(\tilde{\mu}) + \tilde{q}_{11}(\tilde{\mu}) p_k^{(12)}(\tilde{\mu})] I_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\tilde{\mu}}) \\ &\quad + [-\tilde{q}_{12}(\tilde{\mu}) p_k^{(21)}(\tilde{\mu}) + \tilde{q}_{11}(\tilde{\mu}) p_k^{(22)}(\tilde{\mu})] K_0(A_{k+1} \varrho \sqrt{\tilde{\mu}}) \} e^{i \Omega t} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\}$$

Hierin ist

$$\tilde{\mu} = \frac{i \Omega}{\alpha_1^2}, \quad (16.1)$$

und mit diesem Werte berechnen sich die Grössen  $\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_k, \tilde{\zeta}_n, \tilde{p}_k^{(rs)}(\tilde{\mu}), \tilde{q}_{rs}(\tilde{\mu})$  und  $\tilde{\Delta}$  in genau derselben Weise wie früher die entsprechenden Ausdrücke  $\zeta_0, \zeta_k, \zeta_n, p_k^{(rs)}(\mu), q_{rs}(\mu)$  und  $\Delta$  mit Hilfe von  $\mu$ . Alle anderen in (16) vorkommenden Hilfsgrössen bleiben dieselben wie in den Formeln (15).

6. Schlussbemerkung: a) Obwohl die durch (5), (15) und (16) bestimmte Lösung unserer ursprünglichen Aufgabe (1) bis (4) recht kompliziert ist, so lässt sich doch der Wellencharakter jeder einzelnen Teillösung  $v_k(\varrho, t), w_k(\varrho, t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) leicht dadurch zum Vorschein bringen, dass man sich (15) und (16) in der Normalform

$$v_k(\varrho, t) = V_k(\varrho) e^{i\omega[t + \varphi_k(\varrho)]}, \quad w_k(\varrho, t) = W_k(\varrho) e^{i\Omega[t + \psi_k(\varrho)]} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

geschrieben denkt. Der ganze Effekt in jeder Schicht erscheint so als Wellenspiel zweier sich überlagernden und in der  $\varrho$ -Richtung fortschreitenden Temperaturwellen.

b) Unsere allgemeine Theorie enthält als einen Spezialfall auch die Verhältnisse für einen «einschichtigen» Hohlzylinder (das heisst für den Fall  $n = 1$ ). Man bekommt das zugehörige Temperaturfeld durch Summierung von  $v_1(\varrho, t)$  aus (15) und  $w_1(\varrho, t)$  aus (16). Jedoch hat man bei der Berechnung von  $q_{21}(\mu)$  und  $q_{22}(\mu)$  aus (13) alle  $p_0^{(rs)}(\mu) = 1$  zu setzen. Aber auch in diesem allereinfachsten Falle ist das Ergebnis noch immer sehr kompliziert.

c) Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn es möglich ist, an den Trennflächen zwischen einzelnen Körperschichten stetige Änderung sowohl der Temperatur als auch des Wärmeflusses anzunehmen.

### Summary

This paper treats, from a general viewpoint, the propagation of heat waves in an infinite hollow multilayer cylinder subjected to periodic variations of temperature. The hub of this important problem lies in multiplying certain two-by-two matrices together, and the results are very complicated.

(Eingegangen: 30. Januar 1956.)

# Die Wasserdampfkondensation an natürlichem Aerosol bei geringen Übersättigungen

VON WALTER WIELAND, Locarno-Monti<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Die Wasserdampfkondensation in der Atmosphäre ist eine alltägliche Erscheinung. Schon im vergangenen Jahrhundert wurde die Bedeutung der Kondensationskerne erkannt, doch ist bis heute unbestimmt, welche Partikeln des mannigfaltigen Aerosols bei der Kondensation bevorzugt werden. Die Ursache mag damit begründet werden, dass die Feinheit des Aerosols sowohl physikalische wie auch chemische Untersuchungen schwierig gestaltet und nicht selten mit indirekten Methoden gearbeitet werden muss, um eine bestimmte Eigenschaft der Kerne studieren zu können.

Durch geeignete Wahl der Auffangplatten und Benützung eines Doppelkoniometers ist es C. JUNGE und Mitarbeitern [1], [2]<sup>2)</sup> gelungen, das Verhalten des natürlichen und künstlichen Aerosols in Abhängigkeit der relativen Feuchte (RF) der Umgebung zu untersuchen. Aus diesen aufschlussreichen Arbeiten werden folgende Resultate erwähnt:

Im Grössenbereich von  $r = 10^{-6}$  cm bis  $10^{-3}$  cm setzt sich das natürliche Aerosol vorwiegend aus Mischkernen zusammen. Die Kerne sind somit Konglomerate hygrokopischer und wasserunlöslicher Substanzen.

Ein merkliches Anwachsen der Kerne durch Adsorption oder Absorption von Wasserdampf beginnt erst oberhalb einer relativen Feuchte von 70%.

Für Kerne mit einem Radius grösser als  $10^{-5}$  cm gilt das Verteilungsgesetz

$$\frac{dN}{d \log r} = \frac{\text{const}}{r^3}, \quad (1)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Teilchen mit dem Radius  $r$  eines natürlichen Aerosols ist.

Die an Hand von Elektronenmikroskop-Aufnahmen gewonnenen Resultate [3], [4] geben wenig Aufschluss, da einerseits bei gut ausgebildeten Kristallen die Umrisse durch angelagerte Fremdkörperchen verdeckt werden und anderseits leicht flüchtige Stoffe im Hochvakuum verdampfen.

Über die Anzahl der Kondensationskerne, die in einer Expansionskammer mit einem Hub von 1,25 ausgefällt werden, liegen Tausende von Messungen vor [5], [6]. Die vollautomatischen Kondensationskernzählgeräte [7], [8] erlauben

<sup>1)</sup> Osservatorio Ticinese della Centrale Meteorologica Svizzera.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 459.

wohl, im Gegensatz zu den einfacheren Konstruktionen [9], [10], eine fortlaufende Registrierung des Kernganges, ergeben aber keine Aussage über die Aktivität der Kerne im eigentlichen Kondensationsbereich. Es wird nachgewiesen:

Zunahme der Kerndichte durch künstliche oder natürliche Fabrikation von Initialkernen.

Umgekehrt die Abnahme durch Diffusion, Sedimentation und Koagulation [11], [12].

Abhängigkeit des natürlichen Aerosols von der Windrichtung [13], [14], [15].

Die Abnahme der Kernzahl mit der Höhe [16], [17]. Jedoch erlaubt die geringe Anzahl der Messungen noch keine definitive Aussage über die Höhenverteilung.

Die Meteorologen interessieren sich aber vor allem für eine Angabe über den Einsatz der ersten eigentlichen Kondensation am Aerosol in der Atmosphäre und für die Eigenschaften dieser meteorologisch wirksamen Kondensationskerne. Die Lösung dieser Aufgabe wird dadurch erschwert, dass der Übersättigungsgrad in der Atmosphäre nicht genügend genau ermittelt werden kann. Nach Flugzeug- und Ballonaufstiegen schwanken die Werte zwischen 100% und 120% RF.

Anscheinend wurden Messungen über den Einsatz der Kondensation an Kernen bei geringen Übersättigungen nur von J. AITKEN [18] und C. JUNGE [19] ausgeführt. Beide arbeiteten mit dem Expansionsprinzip.

Die von J. AITKEN aufgebaute Apparatur liess eine Berechnung der Wasserdampfübersättigung nicht zu, aber er konnte nachweisen, dass je nach der Zusammensetzung des Aerosols eine grössere oder kleinere Übersättigung notwendig ist, um alle Kerne auszufüllen. Besonders hat er darauf hingewiesen, dass für Freiluftaerosol geringere Übersättigungen notwendig sind als für junges Rauchaerosol.

Die von C. JUNGE konstruierte Expansionskammer erlaubte eine Übersättigungsänderung von 0,5 zu 0,5%. Das zu untersuchende Aerosol musste aber vorgängig verdünnt werden. Systematische Untersuchungen an natürlichem Aerosol wurden nicht durchgeführt.

Theoretische Betrachtungen:

Die unsicheren Aussagen über das Verhalten der natürlichen Kondensationskerne bei geringen Wasserdampfübersättigungen und die spärlichen meteorologischen Angaben liessen vermuten, dass sich alle Aitken-Kerne an der Wolkenbildung beteiligen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der in den verschiedenen Wolkentypen gemessenen Tröpfchendichte [20], die in der Regel, besonders aber über Industriegebieten, wesentlich kleiner ist als die Kerndichte.

Dies veranlasste eine weitere Gruppe, vor allem H. KOEHLER [21], die hygrokopischen Kerne vom übrigen Aerosol zu trennen. Die Bedeutung dieser Unterscheidung wird ersichtlich, wenn wir die Grössenänderung der Kerne

mit der relativen Feuchte verfolgen. Für ein Lösungströpfchen, das im Dampfdruckgleichgewicht mit der Umgebung steht, gilt:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{\Delta p_1}{p_\infty} - \frac{\Delta p_2}{p_\infty},$$

dabei sind:  $p_\infty$  Dampfdruck über der ebenen Wasserfläche,

$p$  Dampfdruck über der Tröpfchenoberfläche,

$\Delta p_1$  Dampfdruckerhöhung infolge der Oberflächenkrümmung,

$\Delta p_2$  Dampfdruckerniedrigung infolge des gelösten Stoffes.

Werden nur Lösungströpfchen mit einem Radius grösser als  $10^{-6}$  cm betrachtet, so kann eine eventuelle elektrische Aufladung vernachlässigt werden.

Bei Berücksichtigung des Gesetzes von THOMSON für den Einfluss der Oberflächenspannung und des Gesetzes von RAOULT für verdünnte Lösungen folgt:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + \frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^3}. \quad (2)$$

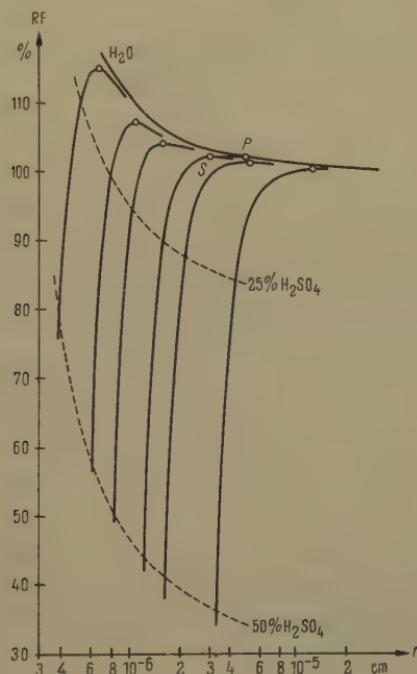
Da bei stark hygrokopischen Lösungströpfchen oder Kernen  $\Delta p_2$  wesentlich grösser sein kann als  $\Delta p_1$ , ist ein Anwachsen schon unterhalb 100% RF möglich, wie dies auch in Figur 1 für  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Tröpfchen dargestellt ist. Mit zunehmender Feuchte der Umgebung vergrössert sich der Radius, bis der Scheitelpunkt  $S$  der Wachstumskurve erreicht wird. Nachher wächst das Lösungströpfchen bei konstant gehaltener Feuchte weiter an. Der Verlauf der Wachstumskurve bis 100% RF wurde durch C. JUNGE [19] experimentell bestätigt.

Als Quelle hygrokopischer Kondensationskerne werden vor allem die Meere betrachtet. Die an der Brandung und bei starkem Wellengang zersprühten Wassertröpfchen verdampfen, zurück bleiben kleine NaCl-Kristalle, die vom Luftstrom fortgetragen werden und später unter geeigneten Bedingungen als Kondensationszentren wirken können. Tatsächlich zeigt eine Analyse von Regenwasser auf Chlor und Natrium, dass eine derartige Niederschlagsregulierung möglich wäre. Ebenso hat A. H. WOODCOCK [22] in Meeressluft bis in eine Höhe von 2700 m NaCl-Kristalle nachgewiesen, in Bodennähe teilweise eine Dichte von  $5 \cdot 10^6$  NaCl-Partikeln/m<sup>3</sup>. Über Festland hat H. DESSENS [23] mit Hilfe der Spinnfadenmethode einzelne NaCl-Kristalle als Rückstände verdampfter Nebeltröpfchen gefunden.

Ob allein die durch die Meere gelieferten NaCl-Kerne als meteorologische Kondensationskerne in Betracht kommen, wird verschiedentlich bezweifelt. Die Analyse von Regenwasser auf Chlor ist nicht stichhaltig, da Chlor auch in anderen Verbindungen oder selbst als Gas in die Regentropfen gelangen kann [1]. Zudem wäre es ausgeschlossen, dass dieselbe Luftmasse über Festland zwei oder mehrmals ausregnen könnte, da der Nachschub an NaCl-Kernen fehlt. Es ist somit noch nicht abgeklärt, ob die verschiedenartigen Mischkerne oder die Meersalzkristalle die Wolkenbildung in der Atmosphäre ermöglichen.

Um den komplizierten Vorgang der Wasserdampfkondensation in der Atmosphäre etwas besser verstehen zu können, soll in der vorliegenden Arbeit untersucht werden:

1. Bei welcher Übersättigung tritt am Freiluftaerosol Kondensation ein?
2. Lassen sich die meteorologisch bedeutenden Kondensationskerne von den übrigen Aitken-Kernen trennen?



Figur 1

Wachstumskurven von  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Lösungströpfchen nach C. JUNGE. Die mit  $\text{H}_2\text{O}$  bezeichnete Kurve ist die Dampfdruckgleichgewichtskurve für reine Wassertröpfchen.

Da bei Untersuchungen mit dem Expansionsprinzip eine bestimmte Übersättigung nur für sehr kurze Zeit erhalten bleibt, wird versucht, das Problem mit einer Methode zu lösen, die an das Mischwolkenprinzip anlehnt.

Entsprechend Figur 1 wird für diese Arbeit definiert:

1. Der Abschnitt links des Scheitelpunktes S einer Wachstumskurve gehört zur *Vorkondensation*, derjenige rechts davon zur eigentlichen *Kondensation*.
2. Entsprechend wird bis und mit Scheitelpunkt von Kondensationskernen oder Lösungströpfchen gesprochen und nach dem Überschreiten der Schwelle von Kondenströpfchen.

Es ist somit ausgeschlossen, dass bei gleichbleibender Feuchte und ruhiger Luft ein Kondenströpfchen andauernd schwebt, es wird weiter anwachsen, bis es im Schwerefeld ausfällt.

Es ist denkbar, dass auch ein grosses Lösungströpfchen dank seiner Masse rasch sedimentiert, jedoch sind bei den vorgenommenen Experimenten die Messzeiten so kurz, dass dieser Einfluss vernachlässigt werden darf.

## 2. Vorversuche

### 1. Experiment

Zwei Luftmassen mit verschiedenem Wasserdampfdruck und verschiedener Temperatur sollen unter folgenden Bedingungen durchmischt werden: die beiden Volumen  $V_1$  und  $V_2$  und der Luftdruck seien gleich, die Wände des Behälters sollen den Vorgang nicht beeinflussen.

Dann gilt nach vollendeter Mischung

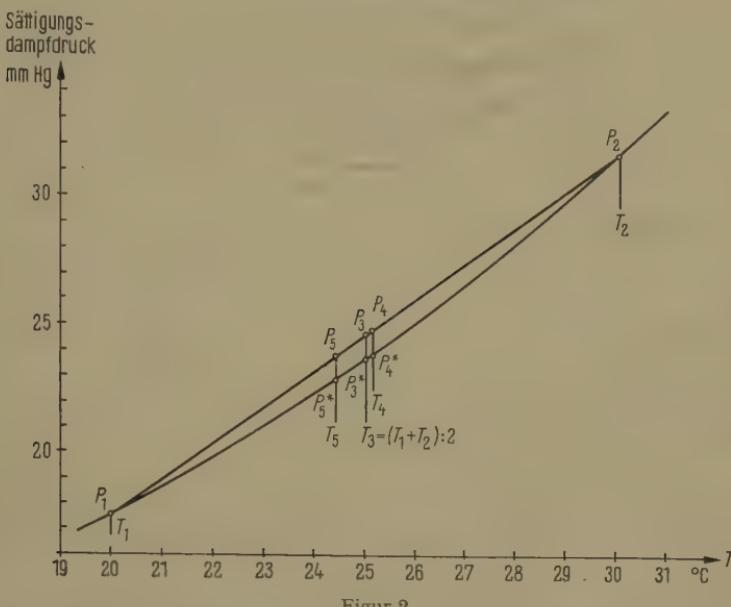
$$\text{für den Dampfdruck: } p = \frac{p_1 + p_2}{2};$$

$$\text{für die Temperatur: } T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Besitzen die beiden Luftmassen eine relative Feuchtigkeit von 100%, so ist die gemischte Luft immer mit Wasserdampf übersättigt (Figur 2), und bei Anwesenheit von hinreichend aktiven Kondensationskernen bildet sich ein feiner Nebel. Zur Bestimmung der Übersättigung des Gemisches aus den Anfangstemperaturen  $T_1$  und  $T_2$  und den entsprechenden Sättigungswerten  $p_1$  und  $p_2$  erweist sich die in Figur 3 dargestellte Kurvenschar als zweckmässig. Ist für eine bestimmte Kurve die Temperatur  $T_1$  konstant und  $T_2$  variabel, so kann für jede Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_2 - T_1$  aus dem Temperaturmittel und dem Mittelwert der entsprechenden Sättigungsdampfdrucke die relative Feuchte berechnet werden. In Figur 3 sind die Übersättigungsprozentile  $\bar{U}$  gegen die Temperaturdifferenzen  $\Delta T$  aufgetragen.

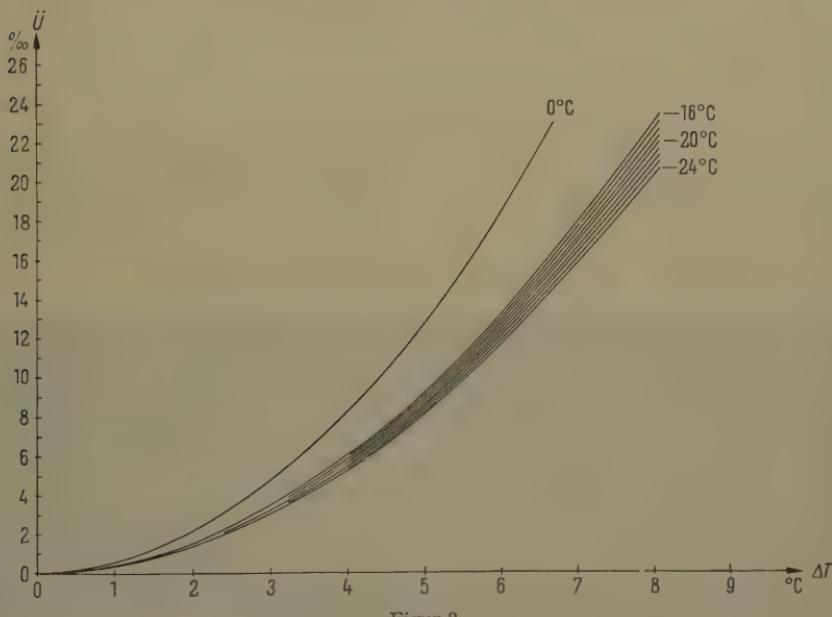
### 2. Experiment

In der Anordnung, wie sie Figur 4a zeigt, wird ein zylindrisches Gefäss von 65 mm Durchmesser und 10 mm Höhe mit einem Aluminiumblock, auf dessen Unterseite ein feuchtes Löschpapier aufgeklebt ist, zugedeckt. Die geschlossene Luft wie auch die Wandung und Bodenfläche besitzen die Tem-



Figur 2

Verlauf der Übersättigung.  $P_1$   $P_2^*$   $P_2$  = Sättigungsdampfdruckkurve.

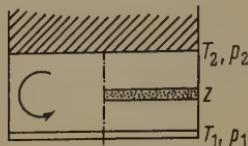


Figur 3

Diagramm zur Bestimmung der Übersättigungspromille bei Mischprozessen berechnet mit:  
 $(T_1 + T_2)/2$  und  $(p_1 + p_2)/2$  (Sättigungswerte),  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

Neben den Kurven sind die Temperaturen  $T_1$  der kälteren Luftmassen angegeben.

peratur  $T_1$ , der Wärmeblock die Temperatur  $T_2 > T_1$ . Innerhalb einer Sekunde wird im geschlossenen Gefäß, je nach der Grösse der Temperaturdifferenz, ein stärkerer oder schwächerer Nebel sichtbar. Die Luft bleibt jedoch nicht ruhig, sondern gleichzeitig mit der Nebelbildung entsteht ein Ringwirbel (Figur 5),



Figur 4a

Stationärer Zustand im Messzylinder. Links: für Wirbelbewegung; rechts: für «ruhige» Luft.  $z$  Zone maximaler Übersättigung.



Figur 4b

Temperaturgefälle zu Figur 4a.

der das ganze Gefäß ausfüllt und über längere Zeit erhalten bleibt. Die den Nebel bildenden Tröpfchen fallen innerhalb weniger Sekunden aus, neue bilden sich keine.

Um die Übersättigung innerhalb des Messgefäßes berechnen zu können, sind abgesehen von den Randeffekten folgende Vorgänge zu berücksichtigen:

- die Wasserdampfdiffusion und der Wärmeausgleich von der Deckfläche zur Bodenfläche,
- die Wirbelbewegung,
- die Kondensation an den Kernen.

In der nachfolgenden Diskussion wird immer angenommen, dass der Dampfdruck direkt unterhalb des mit Wasser getränkten Löschnpapier dem Sättigungsdruck bei der Temperatur  $T_2$  gleich sei und direkt über der Bodenfläche dem Sättigungsdampfdruck bei  $T_1$ . Die der Bodenfläche zugeführte Wärme soll sofort abgeleitet werden, so dass  $T_2$  und  $T_1$  konstant sind.



Figur 5

Die Wirbelbildung im Messzylinder, mit Rauch sichtbar gemacht.

a) *Wasserdampfdiffusion und Wärmeausgleich*

Besitzen Deck- und Bodenfläche unendliche Ausdehnung, so ist eine Wirbelbewegung im Zwischengebiet ausgeschlossen. Nach genügend langer Zeit stellt sich der stationäre Zustand ein, die Temperatur und der Dampfdruck nehmen mit der Höhe linear zu (Figur 4b). Die eingeschlossene Luft ist deshalb mit Wasserdampf übersättigt.

In Figur 2 ist beispielsweise die Deckentemperatur  $30^\circ\text{C}$  und die Bodentemperatur  $20^\circ\text{C}$ . Der jeweilige Übersättigungsbetrag wird einerseits durch die Sättigungsdampfdruckkurve und anderseits durch die Gerade  $p_1 p_2$  begrenzt. Die maximale Abweichung finden wir in  $p_4$ , da  $p_4^*$  mit dem Berührungs punkt der zu  $p_1 p_2$  parallelen Tangente an die Dampfdruckkurve zusammenfällt. Die grösste relative Feuchte wird durch das Verhältnis  $p_5$  zu  $p_4^*$  gegeben. Sie liegt also unterhalb der Mittelfläche des betrachteten Luftvolumens.

In Tabelle 1 wurde für drei verschiedene Zustände der Verlauf der Übersättigungspromille von der halben Höhe an abwärts berechnet, um die maximalen Beträge zu finden. Die Abweichungen vom jeweiligen Temperaturmittel sind in der ersten Zeile in Zehntelsgrad angegeben, während in der ersten Kolonne die Temperaturmittel eingesetzt sind. Die Temperaturdifferenz zwischen Deck- und Bodenfläche beträgt in jedem Falle  $10^\circ\text{C}$ .

Tabelle 1

Temperaturmittel $^\circ\text{C}$ $T_2 - T_1 = 10^\circ\text{C}$	Abweichung vom Temperaturmittel $^\circ\text{C}$				
	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8 negativ
25	3,88	3,90	3,91	3,92	3,91
15	4,57	4,60	4,63	4,63	4,62
5	5,35	5,39	5,43	5,43	5,42

Nach Tabelle 1 sind die Abweichungen zwischen den Übersättigungspromillen der gleichen Zeile sehr gering. Es existiert somit im betrachteten Luftvolumen eine Zone, deren relative Feuchte angenähert durch den aus dem Temperatur- und Dampfdruckmittel errechneten Wert bestimmt ist.

Es soll nun die Ausbreitung der Übersättigung kurz nach dem Aufsetzen der Deckschicht verfolgt werden. Die Diffusion des Wasserdampfes ist gegeben durch

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

und der Temperaturausgleich durch

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Je nachdem  $D$  grösser, gleich, kleiner als  $a$  ist, haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

$D = a$ : Dies ist der Fall der Gleichzeitigkeit der Ausbreitung der Temperatur und des Dampfdruckes. Die für den stationären Zustand berechnete Übersättigung wird nie überschritten, aber in jedem Zeitpunkt erreicht. Die Zone der maximalen relativen Feuchte wandert mit der Zeit von der Deckfläche gegen die Mittelfläche zu.

$D < a$ : Die Temperatur eilt voraus. Die grösste Übersättigung finden wir im stationären Fall.

$D > a$ : Hier eilt der Dampfdruck der Temperatur voraus. In diesem Falle treten anfänglich grosse Übersättigungswerte auf, die mit fortschreitender Zeit in die Werte des stationären Zustandes übergehen.

Verwenden wir die Angaben der Smithsonian Meteorological Tables, so ist:

$D$  für Wasserdampf bei  $20^\circ\text{C}$ :  $0,257 \text{ cm}^2/\text{s}$ ;

$a$  für Luft bei  $20^\circ\text{C}$ :  $0,215 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

Nun ist aber zu berücksichtigen, dass beim Experiment die Oberflächentemperatur des Löschblattes anfänglich tiefer ist als nachher im stationären Zustand. Vor dem Aufsetzen des Wärmeblockes wird die Oberfläche des feuchten Löschpapiers stärker abgekühlt, da mehr Wasser verdampft. Durch die niedrigere Temperatur und den tieferen Wasserdampfdruck wird die Übersättigung verringert. Später steigt die Temperatur wohl an, aber zu diesem Zeitpunkt hat sich der stationäre Zustand nahezu eingestellt.

Das Experiment bestätigt, dass dieser Einfluss stärker ist als die sich ungünstig auswirkende Differenz der diskutierten Koeffizienten. Die stärkste Nebelbildung wird immer im Mittelfeld beobachtet und nicht in der Nähe des Wärmeblockes, wie das für  $D > a$  zu erwarten wäre.

### b) *Der Wirbel*

Es wird nun angenommen, dass in dem abgeschlossenen Gefäss mit den Randbedingungen  $T_2, p_2$  und  $T_1, p_1$  ein Ringwirbel mit vertikaler Achse existiere, dessen Rotationsgeschwindigkeit genügend gross ist, um die Luft derart zu durchmischen, dass im Wirbelfeld sowohl der Dampfdruck wie auch die Temperatur konstant sind. Besitzen Deck- und Bodenfläche gleiche Oberflächenbeschaffenheit, so sind die beiden Grenzschichten gleich dick. Aus Symmetriebetrachtungen folgt für den stationären Zustand, dass die Diffusion durch die beiden Grenzschichten gleich sein muss. Dies ist aber nur der Fall, wenn

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \text{und} \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Also erneut die gleichen Formeln wie für den Mischprozess.

Die *Wirbelbildung*. Bevor die unter a) und b) beschriebenen Vorgänge miteinander verbunden werden, einen kurzen Hinweis auf die Entstehung des Wirbels im Messzylinder. Sobald der Wärmeblock auf den Zylinder gesetzt wird, bildet sich unter der Deckfläche ein Warmluftkissen. Diese Schichtung ist aber nicht stabil, weil die der Wandung benachbarte, warme Luft sich dort abkühlt und als Folge davon abgleitet. Durch Zustrom aus der Mitte wird die an der Deckfläche abgesogene Luftmenge ersetzt. Dadurch entsteht ein laminarer Ringwirbel, dessen Rotationsgeschwindigkeit durch die Gefäßdimensionen und die Temperaturdifferenz ( $T_2 - T_1$ ) bestimmt ist. Kleine Differenzen bewirken eine schwach ausgeprägte Wirbelbewegung, mit zunehmender Deckentemperatur vergrößert sich die Rotationsgeschwindigkeit. Dementsprechend geht der unter a) beschriebene Vorgang immer mehr in b) über. Für die beiden Grenzfälle wurde bereits gezeigt, dass die grösstmögliche Übersättigung genügend genau mit Hilfe der Gleichungen des Mischprozesses berechnet werden kann. Das trifft auch für alle Übergangsformen zu, denn jedes aufsteigende Volumenelement durchquert die Zone der grössten RF.

### c) Die Kondensation an den Kernen

Die Berechnung der Übersättigung wurde immer ohne Berücksichtigung des Kondensationsvorganges ausgeführt. Es bleibt noch zu zeigen, dass dadurch das Resultat nicht geändert wird.

Sobald sich der überschüssige Wasserdampf an den Kernen niederschlägt, sind die unter a) zusammengefassten Überlegungen nicht mehr gültig. Der Kondensationsvorgang bewirkt nicht nur eine lokale Abnahme der Übersättigung, sondern gleichzeitig, dank der freiwerdenden Kondensationswärme, eine örtliche Zunahme der Temperatur.

Für die Kerne, die bereits zu Kondenströpfchen angewachsen sind, haben diese Störstellen keinen Einfluss mehr. Sie fallen im Schwerefeld aus. Die restlichen, hinreichend aktiven Kondensationskerne müssen sich gedulden, bis sich das Dampfdruck- und Temperaturgleichgewicht von neuem eingestellt hat. Durch die Wirbelbewegung und die fallenden Kondenströpfchen wird dieser Vorgang beschleunigt.

Der Ausgleich vollzieht sich sehr rasch, sind doch selbst bei geringen Übersättigungen innerhalb 40 s alle Tröpfchen ausgefallen.

## 3. Das Messgerät

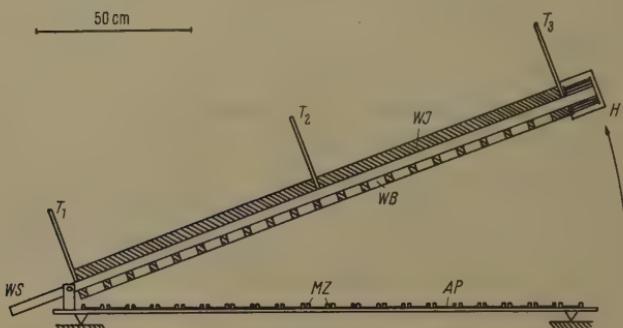
Dank den beschriebenen Eigenschaften eignet sich das 2. Experiment gut zur Untersuchung der Aktivität der Kondensationskerne. Da jedoch zu berücksichtigen ist, dass besonders bei Messungen im Freien die Art und die Anzahl

der Kerne in kleinen Zeitintervallen grossen Änderungen unterworfen sind, muss dieselbe Luftmasse gleichzeitig in verschiedenen Behältern mit verschiedener Übersättigung untersucht werden.

Das in Figur 6 schematisch dargestellte Gerät kann in zwei Teile zerlegt werden:

Wärmestab mit den Wärmeblöcken,

Grundplatte mit den Messzylin dern.



Figur 6

Messgerät für geringe Wasserdampfübersättigungen.

WS Wärmestab; WB Wärmeblock; WJ Wärmeisolation; H Heizung; T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub> Thermometer; MZ Messzylinder; AP Auffangplatte.

### Der Wärmestab WS

Auf dem einen Ende einer Antikorodalstange von 2 m Länge und 40 mm Durchmesser sitzt die Heizung *H*, deren Heizleistung mit einem Drehwiderstand reguliert werden kann. Das andere, freie Ende ist über ein Lager mit der Grundplatte verbunden. Am Wärmestab sind in gleichen Abständen 20 zylindrische Wärmeblöcke *WB* aus Antikorodal mit einer Höhe von 30 mm und einem Durchmesser von 70 mm befestigt. Die Verbindungen zwischen den Blöcken und der Stange werden durch Antikorodalstifte mit einem Durchmesser von 5 mm bewerkstelligt.

Als erste Isolation wurde Resozel und Glimmerband verwendet. Um aber die seitlichen Wärmeverluste möglichst zu reduzieren, wurde der ganze Wärmestab zusätzlich mit Watte eingepackt, so dass nur noch die Bodenflächen der Wärmeblöcke mit den aufgeklebten Löschpapieren sichtbar sind. Im Ruhezustand sind auch diese mit einem wärmeisolierenden Wattepolster zugedeckt.

Im stationären Zustand fliesst ein Wärmestrom vom aufgeheizten Ende zum Lager des Stabes. Die schmalen Hälse, die den Wärmestab mit den Wärmeblöcken verbinden, beeinflussen den laminaren Fluss nur wenig. Zudem

dringen Temperaturschwankungen der Heizung weniger rasch in die Blöcke ein, als dies bei weiten Verbindungen der Fall wäre.

Da trotz der guten Isolation die seitliche Wärmeabgabe nicht vollständig vermieden werden konnte, besitzt der Stab kein lineares Temperaturgefälle.

Für eine bestimmte Heizleistung wurden die Temperaturen  $T_{a,i}$  ( $i=1, \dots, 20$ ) der Wärmeblöcke mit einem Thermoelement ausgemessen. Die entsprechenden Werte  $T_{a,i}^*$  eines linearen Temperaturgefälles lassen sich aus den beiden Endtemperaturen des Wärmestabes berechnen. Wird die Messung für eine weitere Heizleistung wiederholt ( $T_{b,i}$ ,  $T_{b,i}^*$ ), so zeigt sich, dass

$$\frac{T_{a,i}^* - T_{a,i}}{T_{b,i}^* - T_{b,i}} = \text{const.}$$

Es genügt somit, bei einer beliebigen Heizleistung die Temperaturen der Stabenden und der Mitte zu kennen, um mit Hilfe einer Eichkurve alle Wärmeblocktemperaturen berechnen zu können.

### *Die Grundplatte*

Sie besteht aus einer Antikorodalplatte von 2 m Länge, 20 cm Breite und 5 mm Dicke und trägt die 20 Messzylinder *MZ* von 10 mm Höhe und 65 mm Durchmesser.

### *Die Messtechnik*

Die Messungen dürfen erst dann ausgeführt werden, wenn sich im Wärmestab der stationäre Zustand des Temperaturgefälles eingestellt hat.

Durch Senken des Stabes werden alle 20 Messgefässe gleichzeitig zugedeckt. In jedem Zylinder entsteht eine der Wärmeblocktemperatur entsprechende Wasserdampftübersättigung, damit ein Nebel, an dessen Bildung alle hinreichend aktiven Kondensationskerne beteiligt sind.

Die Wassertröpfchen fallen im Schwerefeld innerhalb 1–2 s auf eine mit Kopallack überzogene Glasplatte und bilden in der Lackschicht feine Löcher. Die Anzahl der Löcher, die mit derjenigen der sedimentierten Tröpfchen übereinstimmt, wird nachträglich photoelektrisch ausgezählt [24].

Da, im Gegensatz zum Scholzschen Kernzähler, die Bodenfläche eine geringere Temperatur besitzt als das eingeschlossene Luftvolumen, kondensiert schon bei kleinsten Übersättigungen ein Teil des Wasserdampfes auf die Platte. Wird der früher beschriebene [24] hochempfindliche Lack verwendet, so perforieren auch jene feinen Wassertröpfchen die Lackhaut und fälschen derart das Resultat. Werden jedoch der Lösung pro  $10 \text{ cm}^3$  Flüssigkeit 5 Tropfen rohes Leinöl zugesetzt, so halten derart lackierte Platten einer Übersättigung von mindestens 1,2% stand, ohne dass der direkt kondensierte Wasserdampf

«Fremdlöcher» verursacht. Die relativ grossen Wassertröpfchen der Kondensationskerne vermögen jedoch die Lackschicht gut zu durchlöchern, wie dies eine Kontrolle unter dem Mikroskop zeigte.

#### 4. Die Messungen

##### 1. *Messreihe: Untersuchungen im Freien*

Der Messort, das Osservatorio Ticinese in Locarno-Monti, ist dadurch gekennzeichnet, dass er sich am Nordhang eines ausgeprägten Talkessels befindet, dessen Talsohle (200 m ü. M.) von steilansteigenden Bergen, die bis 2000 m Höhe erreichen, eingerahmt ist.

Entsprechend dieser eigenartigen Lage können wir für die durch den Kessel begrenzte Luftmasse im wesentlichen drei Fälle unterscheiden:

*Nordföhnlage.* Saubere, in der Regel am Nordfuss der Alpen ausgeregnete Luft durchspült das Tal. Diese Lagen sind im allgemeinen durch grosse Sichtweiten und trockene Luft gekennzeichnet.

*Südwindlage.* Feuchte, warme, meist maritime Luft dringt in das Tal ein. Die geringen Sichtweiten (zeitweise unter 5 km) zeigen an, dass es sich um «verunreinigte» Luftmassen handelt.

*Ruhelage.* Es besteht keine nennenswerte Längsströmung, dieselbe Luftmasse bleibt für einige Tage im Kessel eingeschlossen und ist nur der Eigenzirkulation des Tales ausgesetzt. Die Luft altert zusehends, und entsprechend nimmt die Sicht ab.

*Die umliegende Industrie.* Im Bereich der zuströmenden Nordföhnluftmassen befindet sich als einziges kleines Industriezentrum Bodio (Distanz 40 km).

Die Südwinde überqueren die industriereiche Poebene mit den Hauptzentren in Mailand und Turin. Dieses ausgedehnte Industriegebiet wird wohl für die starke Verunreinigung dieser Luftmassen verantwortlich sein.

Im Sommer darf der Hausbrand vernachlässigt werden. Bei Ruhelagen sind einzig die Betriebe in Locarno als kernerzeugende Unternehmen zu erwähnen. Obwohl ihr Anteil an der Gesamtkernzahl gering ist, muss bei Windstille diese andauernde Fabrikation von Initialkernen berücksichtigt werden.

In Tabelle 2 sind die Messungen im Freien unter Berücksichtigung der meteorologischen Daten zusammengestellt worden. Dabei wurde beurteilt:

die Druckverteilung aus der Bodenkarte des Osservatorio Ticinese,  
die Bodenwinde aus den Windregistrierungen in Locarno-Monti,  
die Höhenwinde aus den Sondierungen von Mailand und Agno (Flugplatz  
Lugano),  
die Niederschläge aus der Bodenkarte und den Beobachtungen in Locarno-  
Monti,

Tabelle 2  
Die meteorologischen Verhältnisse zur Zeit der Messungen

Messung Nr.	Datum Zeit	Druckverteilung am Boden	Winde		Niederschläge	Luftmassen	Bewölkung	Sicht	RF %	Temperatur °C
			Boden	Höhe						
5	2.8.55 15.15	Hochdruckbrücke von den Azoren bis Skandinavien, Tief über Algerien und sekundäres Tief über der Adria	mittelistarker Föhn	mit der Höhe zunehmendes Abdrehen auf SW	Gewitter in Süddeutschland, Gewitter im Alpengebiet	gealterte Festlandsuft aus Deutschland verschiebt sich südwärts	9-10/10 Cb	40	45	20,4
7	4.8.55 10.25	Hoch über dem Atlantik, schwaches Sekundärtief über Oberitalien, Kaltfront eines nordrussischen Tiefs verläuft lang der Alpen und stößt gegen Süden vor	mittelistarker Nordwind	N-Wind, späteres Abdrehen auf W	starker Niederschlag am Nordfuss der Alpen	erwärmte Polarluft	310 Sc	30	53	23,0
9	16.40	Frontdurchgang etwa 13.00	schwacher bis mässiger SE-Wind	13.41	Schauer über der Station (Ferngewitter)	im Locarno-Monti stationär	310 Sc	40	42	23,8
10	5.8.55 02.50	Hochdruckkeil schwenkt nach Mitteleuropa	mässiger Nordföhn, jedoch im Abklingen	mit zunehmender Höhe abdrehend auf W	kein Niederschlag am Nordfuss der Alpen	alternde Polarluft	0-1/10 Ac	30	35	17,2
13	8.8.55 17.00	Hochdruckrücken von den Azoren bis Nordskandinavien, Tief über Dänemark und Italien	seit rund 15 h N-Föhn zeitweise böig	starke Nordwinde	Nordstau mit Niederschlag am Nordabfall der Alpen	kalte Meeresluft aus N	0-1/10 Sc	50	25	22,1

Fortsetzung der Tabelle 2

Messung Nr.	Datum Zeit	Druckverteilung am Boden	Winde		Niederschläge	Luftmassen	Bewölkung	Sicht	RF %	Temperatur °C
			Boden	Höhe						
15	9.8.55 19.05	Hoch über dem Atlantik, Tief über Ungarn, flache Druckverteilung über dem Mittelmeer, Mittel- und Westeuropa	Föhn seit 1 1/2 d		schauerartiger Regen über Deutschland und am Nord- fuss der Alpen	über Deutschland verdrängt warme Festlandsuft die kalte Meeresluft	0-1/10 Sc	55 27	20,0	
16	19.23		Wind- sprung von N auf SE			fraglich	0-1/10 Sc	50 27	19,1	
17	12.8.55 11.20	sehr flache Druckverteilung über Mittel- und Südeuropa	sehr schwacher E-Wind	auf 5000 m	über Station am Morgen vereinzelte Schauer, seit 5 min Schauer über Station	Feuchte Mischluft	10/10 Sc	10 85	16,9	
19	17.20		sehr schwache NE-Winde		vereinzelte Schauer über Station seit morgens		10/10 Sc	10 90	16,8	

die Luftmassen soweit möglich aus den monatlichen Witterungsberichten des Deutschen Wetterdienstes,

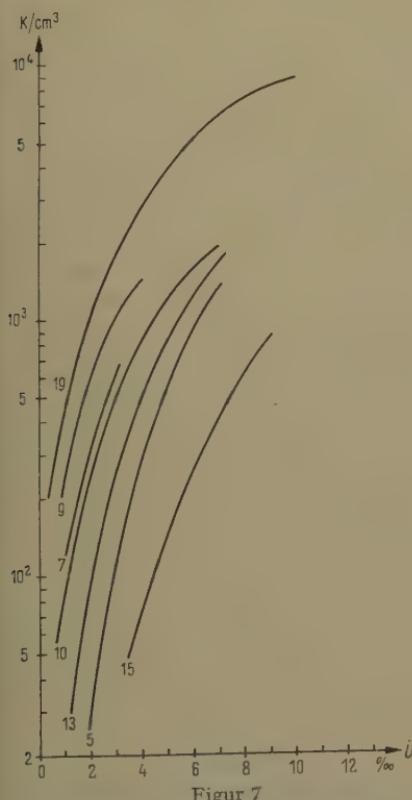
die Bewölkung aus den Beobachtungen in Locarno-Monti,

die Sicht ebenfalls an Hand der Beobachtungen in Locarno-Monti. Diese Angaben sind allerdings nur beschränkt gültig, da der nahe Horizont die Blickweite auf maximal 25 km reduziert.

Die Feuchtigkeit und die Temperatur wurden an der Meßstelle gemessen.

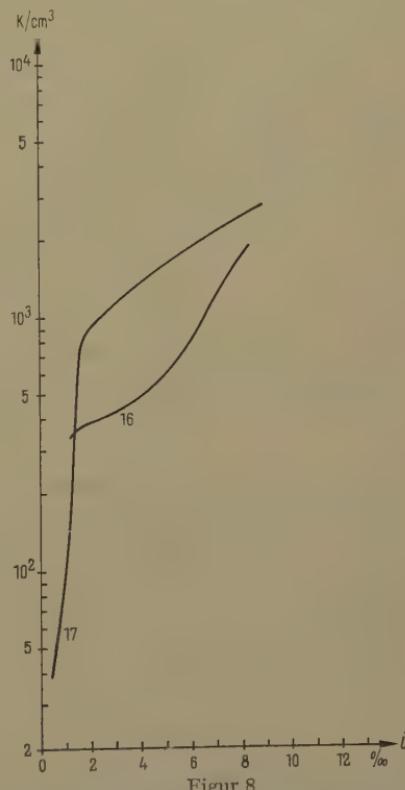
Nach jeder Messung wurde anschliessend eine Kontrollmessung durchgeführt, die nicht besonders angegeben ist, da die Werte gute Übereinstimmung zeigten.

Die gemessenen Kerndichten sind in den Figuren 7 und 8 in Funktion der Übersättigungspromille aufgetragen. Da in einem Messgefäß alle hinreichend aktiven Kerne ausfallen und nicht nur die einer bestimmten Übersättigung zugeordneten, werden die Kurven als Summenkurven bezeichnet.



Figur 7

Summenkurven von Aerosol ungestörter Luftmassen. 5, 13, 15 ausgesprochene Föhnlagen; 19 Mischluft.



Figur 8

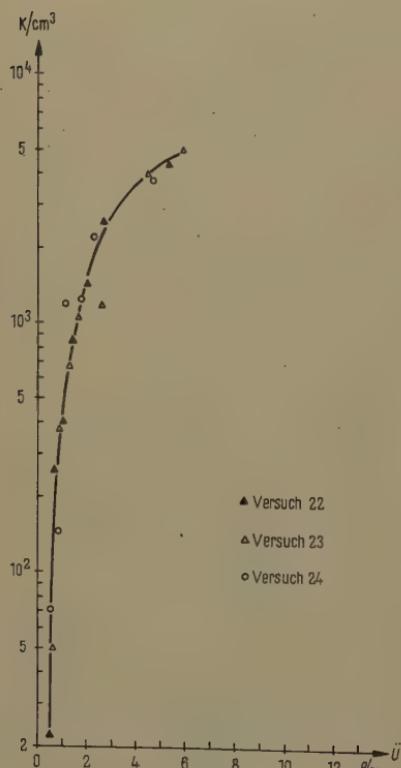
Summenkurven von Aerosol gestörter Luftmassen. 17 Regenschauer; 16 Windsprung.

## 2. Messreihe: Untersuchungen in einem abgeschlossenen Raum

Als Messraum diente ein gut abgeschlossenes Zimmer mit  $10 \text{ m}^3$  Rauminhalt.

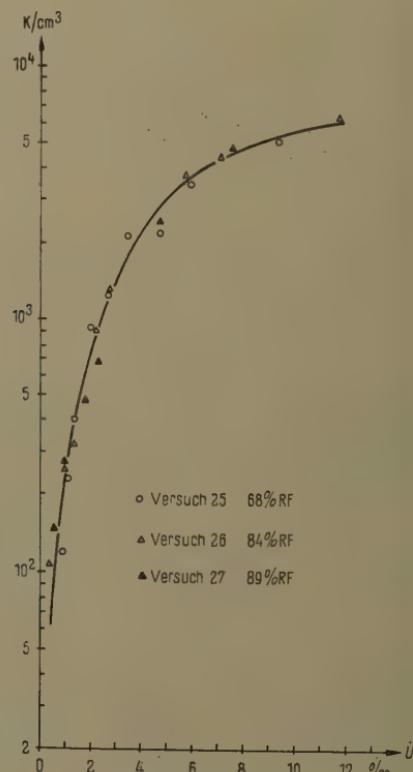
Da Hausbrand oder Mottfeuer in der Nähe der Meßstelle die Untersuchungen im Freien beeinflussen könnten, wurde im Versuchsraum mit einer Blindprobe zuerst die Kerndichte der Zimmerluft bestimmt, dann eine Zigarette geraucht, eine weitere Messung ausgeführt und nach halbstündiger Wartezeit die dritte. Die gewonnenen Werte sind in Figur 9 zusammengefasst.

In einer zweiten Meßserie wurde der Einfluss der relativen Feuchte der Außenluft auf das natürliche Aerosol untersucht. Wiederum wurde zuerst die Kerndichte der Zimmerluft bestimmt und dann durch Aufhängen nasser Tücher



Figur 9

Summenkurve von Zimmersaerosol. 22 Blindprobe mit reiner Zimmerluft; 23 nach dem Rauchen einer Zigarette; 24  $\frac{1}{2}$  Stunde später.



Figur 10

Summenkurve von Zimmersaerosol. Die Verteilung wird durch die variable RF der Zimmerluft nicht beeinflusst.

in zunehmendem Masse der Wasserdampfgehalt der Luft erhöht. Die relative Feuchte betrug bei den drei Messungen 68%, 84% und 89%. Den Verlauf der Kerndichten zeigt Figur 10.

## 5. Diskussion der Messresultate

### Die Summenkurven

Bei der Beurteilung von Figur 7 und 8 ist zu berücksichtigen, dass die eingezeichneten Kurven die Mittelwerte einer Punkteverteilung wiedergeben. In seltenen Fällen wichen einzelne Messpunkte um mehr als 0,5% RF von der entsprechenden Kurve ab. Diese Werte wurden nicht berücksichtigt. Dickeunterschiede des Lackes auf derselben Auffangplatte bewirken unterschiedliche Empfindlichkeit gegenüber den fallenden Kondenströpfchen und zudem bei der photoelektrischen Auszählung verschiedenartige Kontraste und somit stärkere oder schwächere Zählimpulse. Unter diesen Umständen war es nicht möglich zu entscheiden, ob diese extremen Abweichungen reell seien oder nicht.

Die Kurven der ungestörten Luftmassen verlaufen nahezu parallel und scheinen sich der y-Achse asymptotisch anzuschmiegen. Das bedeutet jedoch, dass unterhalb 100% RF keine Kondenströpfchen ausgefällt werden können, was mit der Definition in Einklang steht. Zugleich finden wir darin eine Bestätigung, dass die zur Berechnung der Übersättigung angewandten Vereinfachungen zulässig sind.

Vergleichen wir die verschiedenen Kurven mit den meteorologischen Angaben in Tabelle 2, so stellen wir fest:

Alle Summenkurven von Tagen mit starkem oder mittelstarkem Nordwind (Föhn) befinden sich auf der rechten Hälfte der Kurvenschar. Mit zunehmender Winddrehung auf Süden oder abnehmender Windstärke verschieben sich die Kurven nach links.

Die beiden Summenkurven gestörter Luftmassen in Figur 8 zeigen einen Verlauf, der scheinbar in keiner Weise mit demjenigen ungestörter Luftmassen in Verbindung gebracht werden kann. Die Kurve 17, die 5 min nach Beginn eines Schauers aufgenommen wurde, zeigt gegen kleine Übersättigungen zu einen starken Abfall. Es scheint, dass der fallende Regen die Zusammensetzung des Aerosols beeinflusste. Die Messreihe 16, die 18 min nach dem extremsten Föhnfall aufgenommen wurde, kann nur mit dem in jene Zeit fallenden Windsprung von N auf SE erklärt werden.

Die Summenkurven der Messungen, die in einem abgeschlossenen Raum ausgeführt wurden, verlaufen im wesentlichen wie diejenigen in Figur 7. Die Messwerte der Versuche 22, 23 und 24 mit Zimmerluft und Rauchaerosol weichen nicht voneinander ab (Figur 9). Dasselbe trifft in Figur 10 für die Versuche 25, 26 und 27 mit variabler RF zu. Es folgt also:

1. Sehr junges und feines Aerosol vermag selbst nach Ablauf einer halben Stunde den anfänglichen Verlauf der Summenkurve eines natürlichen Aerosols nicht zu verändern. Eine Beeinflussung der Messungen durch Hausbrand in der näheren Umgebung ist somit nicht zu erwarten.

2. Die Summenkurve wird durch zunehmende Feuchte bis 90% RF nicht merklich beeinflusst.

### Wasserdampfübersättigung in der Atmosphäre

Die Summenkurven in Figur 7 erlauben eine Abschätzung der zur Wolkenbildung notwendigen Übersättigung.

In Tabelle 3 sind die in verschiedenen Wolkenarten gemessenen Tröpfchen-dichten zusammengestellt.

Tabelle 3 [25]

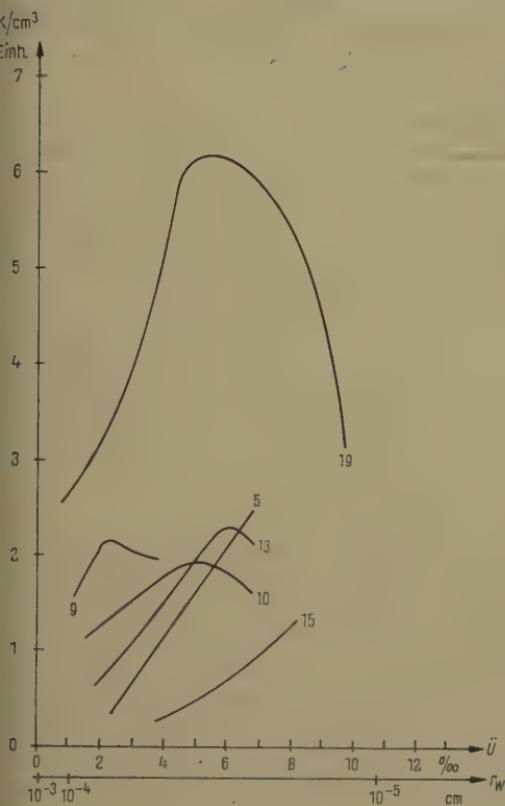
Wolkenart	Tröpfchenzahl/cm <sup>3</sup>
Stratokumulus	350
Kumulus (1)	1000
Altostatus	450
Stratus	260
Nimbostratus	330
Kumulus (2)	545

Unter der Annahme, dass sich in jedem Wolkentröpfchen nur ein einziger Kondensationskern befindet, ist bei einer typischen Föhnluftmasse zur Bildung einer Kumuluswolke mit 1000 Tröpfchen pro Kubikzentimeter eine Übersättigung von 9,5%<sub>00</sub> notwendig, während für Mischluft, wie sie Kurve 19 charakterisiert, schon 1,8%<sub>00</sub> genügen.

Dichte Wolken sind in Föhnluft sehr selten zu beobachten, also darf angenommen werden, dass in der Atmosphäre eine relative Feuchte von 101%<sub>00</sub> selten überschritten wird.

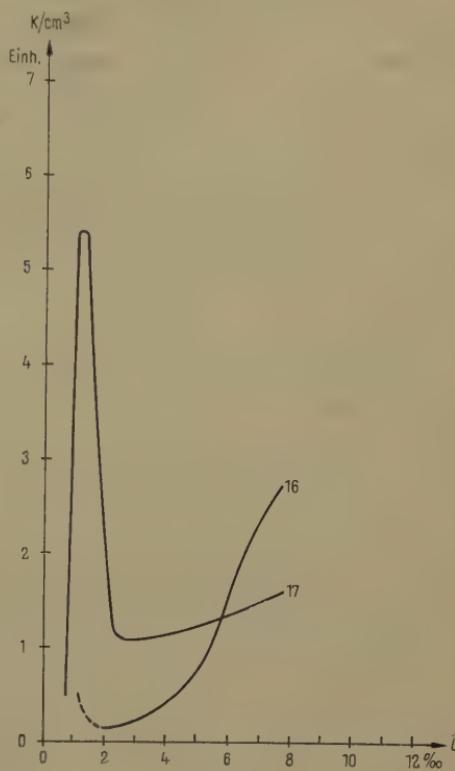
### Die Aktivitätsspektren

Um die Anzahl der bei einer bestimmten Übersättigung aktiven Kondensationskerne zu erhalten, ist die Differentiation der Summenkurve notwendig. Diese wurde in Figur 11 für die ungestörten Luftmassen und in Figur 12 für die gestörten Luftmassen in Übersättigungsintervallen von 0,5 zu 0,5%<sub>00</sub> durchgeführt. Die Ordinatenwerte entsprechen somit nicht der genauen Kernzahl. Die Kurven geben nur die Verteilung wieder.



Figur 11

Aktivitätsspektren von Aerosol ungestörter Luftmassen. Die beiden Abszissen geben die Übersättigungswerte und die entsprechenden Wirkungsradien wieder.

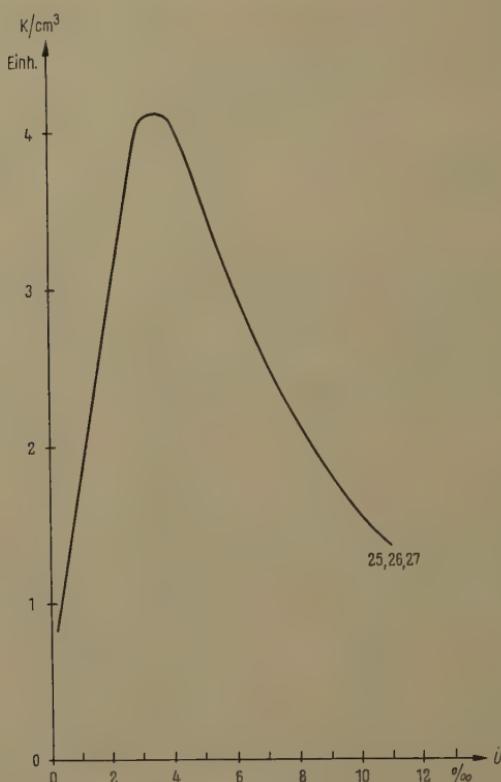


Figur 12

Aktivitätsspektren von Aerosol gestörter Luftmassen. Das Aerosol eines Regenschauers (Kurve 17) besitzt eine auffallende Spitze.

Betrachten wir die Aktivitätsspektren der ungestörten Luftmassen, so stellen wir fest, dass bei ausgesprochenen Föhnlagen die Kernzahl mit abnehmender Kondensationsfähigkeit zunimmt (Kurve 5 und 15). Mit zunehmender Anreicherung der Luftmassen mit aktivem Aerosol ändert sich der Charakter der Spektren. Die Kerndichte nimmt anfänglich zu, erreicht ein Maximum, um dann wieder abzunehmen. Das Zimmeraerosol in Figur 13 zeigt ein ähnliches Verhalten. Auffallend ist der Verlauf der Kurve 17 in Figur 12, die einer gestörten Luftmasse angehört. Sie zeigt eine nadelartige Spitze und nachher einen eher flachen Verlauf.

Bevor nicht entschieden ist, wie weit die Grösse der Kerne oder ihre chemische Zusammensetzung für den Verlauf der Aktivitätsspektren massgebend ist, können die verschiedenen Kurven nicht ausgewertet werden.



Figur 13

Aktivitätsspektrum von Zimmeraerosol. Differentiation der Summenkurve in Figur 10.

Die Wirkungsradien und das Größenverteilungsgesetz von W. JACOBI (1)

An Hand der Wachstumskurven in Figur 1 wird definiert:

Der Wirkungsradius  $r_w$  eines Kondensationskernes entspricht dem Radius eines Wassertröpfchens, das mit jenem Wasserdampfdruck im Gleichgewicht steht, der für die Scheitelpunktfeuchtigkeit des Lösungströpfchens notwendig ist. (In Figur 1 sind die entsprechenden Punkte  $S$  und  $P$ ).

Mit dieser Definition kommt zum Ausdruck, ob ein Kern Eigenschaften besitzt, die die Kondensation fördern oder nicht. Ist  $r$  der Radius des Kernes, so können wir unterscheiden:

$r_w > r$ : Absorptions- oder Adsorptionskerne;

$r_w = r$ : reine Wassertröpfchen;

$r_w < r$ : der Kern ist wasserabstossend.

Aus der Übersättigung im Messgefäß kann mit Hilfe der Beziehung

$$\ln \left( \frac{p_r}{p_\infty} \right) = \frac{2 \alpha M}{\varrho R T r} \quad (4)$$

der entsprechende Wirkungsradius  $r_w$  berechnet werden.

Dabei sind:

$p_r$  Dampfdruck über der gekrümmten Tropfenoberfläche (Radius  $r$ );

$p_\infty$  Dampfdruck über der ebenen Wasseroberfläche;

$\alpha$  Oberflächenspannung bei  $t^\circ\text{C}$ ,  $75,7 (1 - 0,0020 t)$  dyn cm $^{-1}$ ;

$M$  Molekulargewicht des Wassers ( $= 18,02$ );

$R$  Gaskonstante;

$\varrho$  Dichte des Wassers.

Für geringe Übersättigungen, also Wassertropfendurchmesser grösser als  $10^{-6}$  cm, ist bei einer festen Temperatur:

$$U = \frac{C}{r_w} \quad (U = 0, \quad r_w = \infty, \quad U = \text{Gleichgewichtsübersättigung}) .$$

Wir können somit in den Abbildungen der Aktivitätsspektren an Stelle der Übersättigungswerte die entsprechenden Wirkungsradien einsetzen. Als Beispiel wurde das in Figur 11 für eine Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  ausgeführt.

Wird nun auf einem weiteren Blatt die Kerndichte in Funktion von  $\log r_w$  aufgetragen, so kann in Analogie zum Grössenverteilungsgesetz (1) die Zunahme der Kerndichte mit abnehmendem  $r_w$  untersucht werden.

Für die ungestörten Luftmassen wurden in Tabelle 4 die Kontrollwerte für das Gesetz

$$\frac{dN}{d \log r_w} = \frac{C}{r_w} \quad (5)$$

berechnet und nachstehend in Tabelle 4 zusammengestellt.

In der ersten Kolonne sind die Kurvennummern eingetragen und in der ersten Zeile die Wirkungsradien.

Tabelle 4

Kurven-Nr.	Wirkungsradien									
	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	$10 \cdot 10^{-6}$ cm
15	17	15	14							
5	34	32	31	32	30					
13		33	31	30	30	30				
10			19	18	19	18	17			
9					52	48	42	40	41	
19			87	64	50	44	35	32	31	30

Für die Kurven 5, 13 und 10 ergibt die angenommene Gesetzmässigkeit übereinstimmende Kontrollwerte. Die Kurven 9 und 19 gehorchen eher den

## Gleichungen

$$\frac{dN}{d \log r_w} = \frac{C}{r_w^{4/3}} \quad \text{und} \quad \frac{dN}{d \log r_w} = \frac{C}{r_w^{7/2}}. \quad (6)$$

Wie aus Figur 1 ersichtlich ist, stimmen selbst für sehr hygrokopische Substanzen Wirkungsradius und Halbmesser des entsprechenden Lösungströpfchens nahezu überein.

Die Grösse des Lösungströpfchens im Scheitelpunkt der Wachstumskurve ist bestimmt durch das Volumen des hygrokopischen Kernes. Für einen kugeligen Kern mit Radius  $r$  gilt somit:

$$r_w = C r^3.$$

Setzen wir diesen Wert in den Gleichungen (5) und (6) ein, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} & \text{für die Kurven 5, 13 und 10: } \frac{dN}{d \log r} = \frac{C}{r^8}; \\ & \text{für 9: } \frac{dN}{d \log r} = \frac{C}{r^4}; \quad \text{für 19: } \frac{dN}{d \log r} = \frac{C}{r^{4.5}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Aus den Aktivitätsspektren wird somit das gleiche Verteilungsgesetz gefunden, wie es W. JACOBI an Hand optischer Messungen für Mischkerne erhalten hat.

Daraus folgt: Aktivität und Grösse der Kerne verlaufen parallel.

Bei einer nachträglichen Überprüfung des Verteilungsgesetzes in Kitzbühel (Frühling 1954) hat H. W. GEORGII<sup>3)</sup> festgestellt, dass der Exponent von  $r$  von der Wetterlage abhängig ist. So fand er während eines starken Schneeschauers einen Exponenten von 3,7 vor, bei kleinen Windstärken Werte von 2,9 bis 3,1 und bei Windstille sogar 2,6.

Der Wert 3 darf also nur als Mittelwert betrachtet werden. Die überraschend grossen Exponenten der Kurven 9 und 19 könnten mit der industriellen Tätigkeit in Locarno verknüpft sein.

## Beurteilung der Aktivitätsspektren

Der Zusammenhang zwischen der Kondensationsfähigkeit und der Grösse der Partikeln eines Mischkerneaerosols ermöglicht endlich die Diskussion der verschiedenen Aktivitätsspektren.

Sofern wir als Initialkerne nur sehr feines Aerosol zulassen, wird die Grösseverteilung der Kondensationskerne im wesentlichen durch die Koagulation und die Sedimentation gesteuert. Der Niederschlag von Kondenströpfchen kann als beschleunigte Sedimentation betrachtet werden. Bei der Koagulation werden die grossen Kerne bevorzugt, sie wachsen andauernd auf Kosten der kleinen an, bis sie im Schwerefeld ausfallen. Sofern die Kerne nicht unipolar

<sup>3)</sup> Herr Dr. H. W. GEORGII, Universitätsinstitut für Meteorologie und Geophysik in Frankfurt am Main, hat mir diese unveröffentlichten Werte in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt.

aufgeladen sind, wird sich jedes Aerosol im Laufe der Zeit vergröbern. Es sind somit mehr grosse als kleine Kerne vorhanden, sofern nicht eine genügend starke Initialkernquelle den Verlust andauernd ersetzt. Große Kerndichten beschleunigen diesen Vorgang.

### a) Aktivitätsspektren der ungestörten Luftmassen

Die *Föhnluftmassen* verlieren beim Überqueren der Alpen durch wiederholten Niederschlag die grossen Kerne. Gleichzeitig durchmischen sie sich mit kernärmer Luft aus den höheren Schichten der Atmosphäre; die Kerndichte wird kleiner. Auf dem Wege nach Locarno nimmt die «gereinigte» Luft frische Initialkerne auf. Die mitgeführte Initialkerndichte ist umgekehrt proportional der Windgeschwindigkeit, sofern bei starken Winden vom aufgewirbelten Aerosol abgesehen wird.

Die Aktivitätsspektren reproduzieren diese Vorgänge sehr deutlich:

*Kurve 15:* Nach  $1\frac{1}{2}$  tägiger Föhnperiode hält noch starker Nordwind an. Die Massenkonzentration der Kerne pro Kubikzentimeter Luft ist klein, das Maximum der Größenverteilungskurve fällt ausserhalb des Messbereiches.

*Kurve 5:* Mittelstarker Föhn. Die Koagulation wurde durch die grössere Anzahl Initialkerne beschleunigt, die Kurve verschiebt sich gegen grössere Radien zu.

*Kurve 13:* Böiger Nordföhn. Der Einfluss der Initialkerne hat sich verstärkt, das Maximum der Verteilungskurve liegt bereits innerhalb des Messbereiches.

*Kurve 10:* Mässiger Nordföhn ist im Abklingen begriffen. Nebst der Möglichkeit, in vermehrtem Masse Initialkerne aufzunehmen, ist nun auch die verlängerte Koagulationszeit zu berücksichtigen. Die Vergröberung des Aerosols ist schon ausgeprägt.

Das eine Beispiel einer *stationären Luftmasse* (Kurve 9) zeigt die normale Entwicklung aus der «Föhnreihe». Das Maximum ist nicht besonders ausgeprägt, da die Fabrikbetriebe von Locarno laufend Initialkerne erzeugen.

Auffallend ist die Zunahme der grossen Mischkerne nach dem Vorstoss *maritimer Luftmassen* (Kurve 19). Der Einfluss der ausgiebigen Initialkernquellen in der Poebene ist offensichtlich.

Ein Vergleich dieser Resultate mit den in Locarno-Monti von F. AMBROSETTI [26] ausgeführten Ionenmessungen zeigt, wenn auch nur grob, den parallelen Verlauf der Kerne und der Ionen. So ist in Föhnluft die Kleinionenzahl 1,5- bis 2mal grösser als das Mittel (Extremwert 3). Umgekehrt ist die Anzahl der Gross- und Mittelionen in derselben Luftmasse 1,5- bis 4mal kleiner.

### b) Aktivitätsspektren der gestörten Luftmassen

Mischen sich zwei Luftmassen mit verschiedenartigem Aerosol, so muss im resultierenden Spektrum die Überlagerung der beiden ursprünglichen Aktivitäts-

spektren zum Ausdruck kommen. Kurve 16 zeigt, wie durch einen *Windsprung* von Föhn auf SE die normale Verteilung gestört wird.

Auffallend ist der Verlauf der Kurve 17. Die Messung wurde 5 min nach dem Aufprallen der ersten Tropfen eines *Regenschauers* ausgeführt. Kernkoagulation allein wird wohl in den seltensten Fällen eine derart hervorstechende Spitze in der Größenverteilungskurve zur Folge haben. Um eine befriedigende Erklärung zu finden, ist der Niederschlagsmechanismus zu berücksichtigen.

Durch Kondensation von Wasserdampf an den aktivsten Kernen werden die ersten Wolkentröpfchen gebildet. Die Koagulation zwischen den Wassertropfen und den freien Kernen ist aber nach C. JUNGE [1] wesentlich grösser als die Eigenkoagulation der Kerne. Die Kerndichte innerhalb der Wolke nimmt somit ab, und die an die Tröpfchen gebundenen Kerne vergrössern sich. Um aber einen grosstropfigen Niederschlag zu erhalten, sind mehrere Zusammenstöße zwischen den Wolkentröpfchen notwendig. Das führt wiederum zu einer beträchtlichen Vergrösserung der gebundenen Kerne.

Je nach der relativen Feuchte der bodennahen Luftsicht verdunstet ein Teil des nunmehr grosstropfigen Niederschlags, bevor er auf die Erdoberfläche aufprallt. Zurück bleiben die durch drei verschiedene Koagulationsprozesse stark angewachsenen Kerne. Da sich die umgebende Luft durch die Verdunstung abgekühlt hat, sinkt sie mit ihren Kernriesen zu Boden.

Das Aktivitätsspektrum dieses Aerosols zeigt deshalb eine selektive Zunahme der grossen Kerne, während die Anzahl der Kerne mit kleineren Radien gering ist.

Dieser Vorgang der Kernvergrösserung kann in der Natur häufig beobachtet werden, wenn sich Schauerwolken ohne auszuregen rasch auflösen. An Stelle der Tröpfchenwolke ist bei günstiger Beleuchtung eine auffallende Dunstwolke zu sehen, was auf grosses Aerosol schliessen lässt.

Diese wenigen Beispiele zeigen bereits, wie die Aktivitätsspektren der Kondensationskerne und die mannigfaltigen Vorgänge in der Meteorologie sehr eng miteinander verknüpft sind.

### Die Bedeutung der Kondensationskerne maritimen Ursprungs

Aus den Summenkurven und den Aktivitätsspektren ist ersichtlich, dass die Wolkenbildung über dem inneren Festland ohne Zuhilfenahme der Meersalzkerne erklärt werden kann. Nur in zwei der diskutierten Fälle (Kurve 17 und 19) drang Mittelmeerluft bis zum Messort vor. Die damit verbundene Zunahme der Bewölkung und der anschliessende Niederschlag ist der zugeführten Feuchte und nicht einem besonders gearteten Aerosol zu verdanken.

Das schliesst nicht aus, dass in küstennahen Gebieten Meersalzkerne für den Niederschlagsprozess von entscheidender Bedeutung sind. Dies besonders, wenn mangels ergiebiger Initialkernquellen die Entstehung grosser Mischkerne

verunmöglicht wird. So haben G. YAMAMOTO und T. OHTAKA [27] festgestellt, dass im gewöhnlichen Nebel mehrheitlich Kernkonglomerate enthalten sind, während im tropfenden Nebel die Meersalzkerne überwiegen.

### Zusammenfassung

Die geringe Anzahl der Messungen und der untersuchten Ereignisse erlauben noch keine Verallgemeinerungen.

An Hand der in einer bestimmten Zeitspanne in Locarno-Monti ausgeführten Messungen kann rückblickend zur Problemstellung bemerkt werden:

1. Im bodennahen Freiluftaerosol scheinen immer hinreichend aktive Kerne vorhanden zu sein, die eine Wasserdampfkondensation im Bereich von 100 bis 101% RF ermöglichen.

2. Die zur Wolkenbildung wichtigen Kondensationskerne sind massgeblich durch ihre Grösse ausgezeichnet und lassen sich deshalb nicht von den übrigen Aitken-Kernen trennen, sofern nicht eine Übersättigungsgrenze eingeführt wird.

3. Aktivität und Grösse der Kerne verlaufen parallel.

4. Besteht das Aerosol nur aus Mischkernen, so ist die Koagulation, als vorbereitender Prozess für die anschliessende Kondensation in der Atmosphäre, von grosser Bedeutung.

5. Meersalzkerne können die Wasserdampfkondensation wohl unterstützen, sind aber nicht notwendig, da hinreichend aktive Mischkerne vorhanden sind.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Rahmen des Forschungsprogramms der «Eidg. Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr» am Osservatorio Ticinese in Locarno-Monti durchgeführt. Der Abteilung für Landwirtschaft des EVD danke ich für die zu dieser Arbeit benötigten finanziellen Mittel. Dank gebührt Herrn Prof. Dr. J. ACKERET, Herrn Prof. Dr. R. SÄNGER, Präsident der Kommission, Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER und dem Leiter des Tessiner Instituts, Herrn J. C. THAMS, für das grosse Interesse, das sie diesen Untersuchungen entgegenbrachten.

### ANHANG

#### Kondensationskerne und Wolkenbildung

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die mit bodennahem Aerosol gefundenen Resultate auch für höher gelegene Luftschichten gültig sind. Da für die mittlere Atmosphäre Angaben über die Größenverteilung der Kondensationskerne fehlen, wird ein direkter Vergleich mit den ausgeführten Messungen verunmöglicht. Kann jedoch gezeigt werden, dass sich in jenen Höhen die gleichen Prozesse wiederholen, so müssen auch die Resultate übereinstimmen.

### 1. Die Bedeutung der Temperaturinversion

Die mittlere Atmosphäre besitzt keine eigentlichen Kernquellen, da die Schwebeteilchen durch die aufsteigende, warme Luft hinaufgetragen werden. Ist diese Bewegung turbulent, so mischt sich kernreiche mit kernarmer Luft. Ist der Aufstieg laminar, so mischen sich nur die Randzonen des Warmluftpaketes, hingegen haben besonders die kleinen Kerne genügend Zeit, um in den «Aussenraum» zu diffundieren. Beide Vorgänge wirken somit kernvermindernd. Mit der Kernabnahme ist eine verzögerte Koagulation verbunden. Die Bildung grosser Kerne wird fraglich, und entsprechend sind für die Wasserdampfkondensation grosse Übersättigungen notwendig. Dies ist bei einem normal geschichteten Luftkörper mit einer Temperaturabnahme von  $1^{\circ}\text{C}$  pro 100 m Höhenzunahme der Fall, wie das beim aufsteigenden Rauchaerosol gut beobachtet werden kann.

Das Verhalten der Kerne ändert sich, sobald die aufsteigende, warme Luft auf eine Temperaturinversion stösst. Die weitere Konvektion wird verhindert, das Aerosol durch die Sperrsicht aufgefangen. Durch nachfolgende Luftpakete werden immer wieder Kerne nachgeschoben, so dass sich mit der Zeit die Kerndichte unterhalb der Inversion vergrössert. Gleichzeitig wird die Koagulation beschleunigt und die Bildung grosser Mischkerne ermöglicht. Die Aktivität des Aerosols gegenüber Wasserdampf nimmt zu. Die Grössenverteilung der Schwebeteilchen unterhalb der Sperrsicht wird durch die Anzahl und Grösse der nachgeschobenen Kondensationskerne, die Koagulation und die Lebensdauer der Inversion gesteuert. Analoge Vorgänge sind für das Wachstum des bodennahen Aerosols verantwortlich. Es ist somit zulässig, die gewonnenen Resultate auf die mittlere Atmosphäre zu übertragen.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass auch, vom Standpunkt des Aerosols aus betrachtet, der Temperaturinversion grosse, wenn nicht entscheidende Bedeutung zukommt. Sie allein ermöglicht den aufsteigenden Kondensationskerne die notwendige Vorbereitung auf den Kondensationsprozess hin.

Inversionen sind beinahe alltäglich. Sie entstehen nicht nur bei Warm- und Kaltluft einbrüchen, sondern auch nachts durch die Abkühlung der bodennahen Luftschicht. Im letzten der drei Fälle wird zwar die Konvektion verhindert, aber nach Sonnenaufgang, sobald die Erdoberfläche genügend erwärmt ist, kann sie erneut einsetzen.

Im Talkessel des Langensees kann die Entstehung der Dunstschichten sehr gut verfolgt werden. Die Verhältnisse werden auch durch eine Messreihe mit dem Scholz-Zähler gut wiedergegeben:

oberhalb der Dunstschicht:	15 000 Kerne/cm <sup>3</sup> ;
in der Dunstschicht:	45 000 Kerne/cm <sup>3</sup> ;
unterhalb der Dunstschicht:	30 000 Kerne/cm <sup>3</sup> .

Die grössere Kernkonzentration unterhalb der Inversion kommt deutlich zum Ausdruck.

### 2. Die Wasserdampfkondensation

Sofern in der mittleren Atmosphäre wirklich ähnliche Grössenverteilungen der Schwebeteilchen zu erwarten sind, wie sie für bodennahes Aerosol gemessen

wurden, müssen auch die Summenkurven einen analogen Verlauf zeigen. Um das Problem der Kondensation diskutieren zu können, werden deshalb die Bodenwerte zu Hilfe genommen.

Die notwendige Wasserdampf übersättigung in der Atmosphäre kann durch zwei Prozesse erreicht werden:

der *adiabatische Aufstieg eines Luftpaketes*;

die *Mischung zweier Luftmassen* unter geeigneten Bedingungen.

Im vergangenen Jahrhundert wurde die 1784 von J. HUTTON aufgestellte Mischwolkentheorie durch die von H. WETTSTEIN [28] angeregte und von J. HANN ausgebauten Adiabatentheorie abgelöst. Die wichtigsten Einwände gegen die Mischprozesstheorie waren die freiwerdende Kondensationswärme, die ohne adiabatischen Aufstieg nicht kompensiert werden konnte, und das damit verbundene Ausbleiben ergiebiger Niederschläge. W. v. BEZOOLD [29] hat darauf die verschiedenen Möglichkeiten von Mischungsvorgängen zweier Luftmassen ausgiebig diskutiert und ist zum Schluss gekommen, dass mindestens der Bodennebel und die Schichtbewölkung nach der alten Theorie genügend erklärt werden könnten.

Es geht jedoch nicht darum, diese Streitfrage erneut aufzugreifen und die Wolke als Ganzes zu betrachten. Im Folgenden wird nur der erste Einsatz der Kondensation am vorhandenen Aerosol diskutiert, also die Bildung der ersten Kondenströpfchen.

*Der adiabatische Prozess:* Um die Kondensation durch rein adiabatische Abkühlung zu ermöglichen, ist das Aufsteigen eines in sich geschlossenen Luftpaketes notwendig. Leider existieren über den Durchmesser dieser «Wärmluftballone» nur wenige Angaben<sup>4)</sup>.

Die gedachten Wände des aufsteigenden Luftvolumens können wohl jegliche Mischung verhindern, Diffusion wird aber trotzdem stattfinden. Es wird sich somit vom Zentrum bis zur Randzone ein Wasserdampfdruckgefälle einstellen, dessen Stärke einerseits durch die Feuchte des umgebenden Raumes und anderseits durch die zunehmende RF des aufsteigenden Paketes bestimmt ist. Die Difusionsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

ist mit der Differentialgleichung der Kondensationsadiabaten

$$\frac{d \log T}{d \log p_L} = \frac{R + r m / T}{c_p + r m dE / E dT}$$

zu verbinden.

Dabei sind:

$p_L$  Luftdruck;

$c_p$  spezifische Wärme trockener Luft;

$r$  Kondensationswärme pro Gramm Wasser;

$m$  Mischungsverhältnis Wasserdampf/trockene Luft;

$E = E(T)$  Sättigungsdruck des Wasserdampfes.

Dadurch entsteht eine neue Adiabatengleichung, die zeitabhängig wird.

<sup>4)</sup> Nach Aussagen von Segelfliegern kann der Durchmesser in seltenen Fällen bis 300 m und mehr betragen, doch bleibt immer ungewiss, ob es sich um einen Konvektionsschlauch oder ein geschlossenes Luftpaket handelt.

Um die komplizierte Rechnung zu umgehen, soll das Problem an Hand vorhandener Beobachtungen studiert werden.

Nach M. DIEM [25] schwankt der Flüssigwasser-Gehalt einer Wolke je nach Art zwischen 0,09 und 0,87 g/m<sup>3</sup>. Dieser kondensierte Wasserdampf muss durch den adiabatischen Prozess vorgängig freigemacht werden.

Aus der zu erwartenden Menge Kondenswasser kann für die verschiedenen Wolkenarten die notwendige Abkühlung der aufsteigenden Luft berechnet werden. Die Rechnungen wurden für die Basistemperaturen 10°C und 0°C ausgeführt. Dabei wurde angenommen, dass die Luftmassen zu Beginn des Aufstieges mit Wasserdampf gesättigt sind. Neben den in Tabelle 5 zusammengestellten Werten für die Abkühlung ist noch die Zeit eingetragen, die das Luftpaket für den Abkühlungsvorgang benötigt. Dabei wurde für alle Wolkenarten mit einer Steiggeschwindigkeit von 2 m/s und einer Temperaturabnahme von 0,6°C pro 100 m Steighöhe gerechnet.

Tabelle 5

Wolkenart	Gehalt an Flüssig-Wasser g	Basistemperatur 10°C		Basistemperatur 0°C	
		T °C	t s	T °C	t s
Sc	0,09	— 0,16	13	— 0,24	20
Cu (1)	0,32	— 0,56	46	— 0,87	72
As	0,28	— 0,49	41	— 0,76	63
St	0,29	— 0,51	42	— 0,79	66
Ns	0,40	— 0,70	58	— 1,13	84
Cu (2)	0,87	— 1,55	129	— 2,52	210

Die der Rechnung zugrunde gelegte Steiggeschwindigkeit trifft im günstigsten Fall für den Cu (1) zu. Für Cu (2) ist sie maximal zehnmal grösser und in allen anderen Fällen wesentlich kleiner. Die Werte sind somit, ausgenommen diejenigen für den Cu (2), für den Adiabaten-Prozess sehr günstig berechnet, und trotzdem sind die notwendigen Steigzeiten beachtlich gross. Wird zudem die Diffusion des Wasserdampfes in den Außenraum berücksichtigt, werden die Steigzeiten um ein Vielfaches grösser. Es ist fraglich, ob dann noch eine Übersättigung möglich ist.

Um die Größenordnung der Diffusion einigermassen abschätzen zu können, sei hier ein kleines Experiment beschrieben.

Wird der Kondensationskernzähler von J. SCHOLZ im Bruchteil einer Sekunde expandiert, so bildet sich im Rezipienten eine dichte Tröpfchenwolke. Bei einer Expansionsdauer von 30 s kann keine Nebelbildung beobachtet werden, da in dieser Zeit der überschüssige Wasserdampf fortwährend an die Gefässwände diffundiert und keine hinreichende Übersättigung zustande kommt.

Diesem Experiment kann entgegengehalten werden, dass das Versuchsvolumen zu klein gewählt ist. Doch ist anderseits zu berücksichtigen, dass die Übersättigung im Scholz-Zähler, bei rasch ausgeführter Expansion, mindestens hundertmal grösser ist als diejenige, die in der Atmosphäre möglich ist.

Es soll nun die Wasserdampfkondensation an die Kerne untersucht werden. Dabei wird angenommen, dass noch keine Wolke existiere und das betrachtete Volumen aufsteigender Luft als erstes die Möglichkeit besitze, Wasserdampf

abzugeben. Das mitgeführte Aerosol zeige eine Größenverteilung analog den Summenkurven für ungestörte Luftmassen.

In dem aufsteigenden Luftpaket werden die aktivsten Kerne in einem bestimmten Augenblick, bei hinreichender Übersättigung, als Kondensationszentren wirken, und die ersten Tröpfchen entstehen. Angenommen, es seien im Mittel 10 pro Kubikzentimeter. Um eine Kumuluswolke zu bilden, sind aber gegen 1000 Tröpfchen pro Kubikzentimeter notwendig. Aus den Summenkurven der Bodenwerte folgt, dass hierfür im günstigsten Falle eine weitere Übersättigung von mindestens 2% erforderlich ist. Dazu ist bei einer maximalen Aufstiegs geschwindigkeit von 2 m/s eine Kondensationszeit von mindestens 2 s notwendig. Es ist deshalb nicht anzunehmen, dass der überschüssige Wasserdampf an neue Kerne diffundiert, sondern weiterhin an die bereits gebildeten Tröpfchen kondensiert.

Das oben beschriebene Experiment mit dem Scholz-Zähler darf hier als Vergleich zu Hilfe genommen werden. Die Gefäßwände stellen die bereits vorhandenen Tröpfchen dar. Obschon sie eine wesentlich höhere Temperatur besitzen als die expandierte Luft, nehmen sie bei langer Kondensationszeit allen freiwerdenden Wasserdampf auf.

Wenn auch eventuell durch rein adiabatische Vorgänge einige Kondenströpfchen entstehen könnten, ist trotzdem schwierig zu erklären, wie die in den Wolken beobachtete Zahl der Tröpfchen entstehen sollte. Der Vorgang ist zu langsam.

*Der Mischprozess:* Unter diesem Abschnitt werden alle Vorgänge zusammen gefasst, bei welchen zwei Luftpakete mit verschiedener Temperatur und verschiedenem Dampfdruck einander berühren. Der eine Extremfall ist die vollständige Mischung und der andere die Berührung entlang einer Grenzzone. Im 2. Kapitel wurde bereits gezeigt, dass die zweite Möglichkeit, ein reiner Diffusionsprozess, beinahe dieselben Resultate zeigt wie die Durchmischung.

Drei Merkmale zeichnen diese Vorgänge aus:

- Bei genügend grosser Temperaturdifferenz der beiden Luftmassen kann die Mischluft auch dann übersättigt sein, wenn die beiden Komponenten ursprünglich nicht mit Wasserdampf gesättigt waren. Das folgt aus den Figuren 2 und 3.
- An den Randzonen verläuft der Mischprozess so rasch wie die Kondensation an die Kerne, das zeigen die beschriebenen Experimente.
- Neben dem Aktivitätsspektrum des Aerosols entscheidet der Dampfdruck und die Temperatur der beiden Luftmassen über die Anzahl sich bildender Kondenströpfchen.

Nachteilig für diese Vorgänge ist die geringe Menge freiwerdenden Wasserdampfes, so dass keine grossen Tröpfchen entstehen können.

*Die Kombination von Mischprozess mit adiabatischem Aufstieg:* Bei der Gegenüberstellung der beiden Vorgänge zeigt sich, dass zur Einleitung der Kondensation eher der Mischprozess in Frage kommt. Da er nicht auf die Sättigung der beiden Luftmassen angewiesen ist, eilt er dem adiabatischen Prozess voraus. Ist die Kondensation eingeleitet, so wird, dank der freiwerdenden Kondensationswärme, die Konvektion verstärkt, so dass in dieser Phase Mischung und adiabatischer Aufstieg einander gegenseitig unterstützen und die Bildung grösserer Wolkentröpfchen ermöglichen. In Tabelle 6 sind die beiden Vorgänge entsprechend ihrer Bedeutung zusammengestellt.

Es soll nun kurz überprüft werden, ob die Angaben in Tabelle 6 den Vorgängen in der Natur entsprechen.

Tabelle 6

Zeitlicher Ablauf	Vorgang	Zeitablauf	RF %	Ereignis
1. Prozess	adiabatischer Aufstieg	langsam	bis 100	Vorkondensation
2. Prozess	Mischung	schnell	über 100	Kondensation
3. Prozess	adiabatischer Aufstieg und Mischung	langsam bis schnell	ungefähr 100	Vergrösserung der Kondensatröpfchen

Die *Schichtbewölkung* entsteht vorwiegend durch Mischung an der Grenzschicht zweier Luftmassen. Die Temperaturdifferenz ist in der Regel gering. Nach Tabelle 6 sind nur kleine Tröpfchen zu erwarten, da der 3. Prozess wegfällt.

Bei der *Quellbewölkung* vergrössert die aufsteigende Warmluft die Temperaturdifferenz zwischen den sich mischenden Luftmassen. Turbulenz beschleunigt die Mischung. Entsprechend der grösseren Übersättigung sind viele Kondenströpfchen zu erwarten. Der dritte Prozess ist für diese Wolkenart charakteristisch. Es müssen sich somit je nach Aufstiegsgeschwindigkeit mittelgrosse bis grosse Wolkentröpfchen bilden.

In Tabelle 7 sind die zu erwartenden Werte den Beobachtungen von M. DIEM gegenübergestellt.

Tabelle 7

Wolkengruppe	Tröpfchenzahl je cm <sup>3</sup>	Flüssigwasser-gehalt	Tröpfchenzahl je cm <sup>3</sup>	Flüssigwasser-gehalt g/m <sup>3</sup>
Schichtbewölkung	klein	klein	260–450	0,28–0,29
Quellbewölkung	mittel bis gross	mittel bis gross	545–1000	0,32–0,87
entsprechend Tabelle 6			nach M. DIEM	

Die Übereinstimmung ist befriedigend. Es ist jedoch zu erwarten, dass bei sehr grossen Temperaturdifferenzen und geeignetem Aerosol auch der Mischprozess zu grossen Tröpfchendichten führen kann. Dies könnte der Fall sein, wenn kalte, feuchte Luft über eine warme Wasserfläche wegstreicht.

Den Betrachtungen über die Bedeutung der Temperaturinversion und die Kondensation liegt vorderhand ein schwaches Fundament zugrunde, auch wenn verschiedene Tatsachen zugunsten der Überlegungen erwähnt werden können. Entscheiden werden die noch auszuführenden Messungen.

Vor allem wäre zu untersuchen:

1. über längere Zeit das Verhalten des bodennahen Aerosols,
2. die Höhenabhängigkeit des Aerosols und der Einfluss der Temperaturinversion,
3. die Aufstiegsgeschwindigkeit und die Grösse der Warmluftpakete bei wolkenlosem Himmel, um den Einfluss der Wasserdampfdiffusion berechnen zu können.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. JUNGE, *Die Konstitution des atmosphärischen Aerosols*, Ann. Met., Hamburg, Beiheft 1952.
- [2] W. JACOBI, C. JUNGE und W. LIPPERT, *Reihenuntersuchungen des natürlichen Aerosols mittels Elektronenmikroskop*, Arch. Met., Wien, 5, H. 2, 166 (1952).
- [3] F. LINKE, *Kondensationskerne, im Elektronenmikroskop sichtbar gemacht*, Naturwissenschaften 31, 230 (1943).
- [4] L. FACY, *Nature et structure des noyaux de condensation*, J. scien. meteor. 14, 67 (1952).
- [5] H. LANDSBERG, *Atmospheric Condensation Nuclei*, Beitr. Geophys. 3., Sup. B., 155 (1938).
- [6] H. BURCKHARDT und H. FLOHN, *Die atmosphärischen Kondensationskerne*, Bäder Klimaheilk. 1939.
- [7] L. W. POLLAK, *A Condensation Nuclei Counter with Photographic Recording*, Geofis. pur. appl. 22, 75 (1952).
- [8] F. VERZÄR, *Kondensationskernzählung mit automatischer Registrierung*, Arch. Met., Wien, 5, H. 3, 372 (1953).
- [9] J. AITKEN, *On a Simple Pocket Dust-Counter*, Proc. roy. Soc. Edinb. 18, 39 (1890).
- [10] J. SCHOLZ, *Vereinfachter Bau eines Kernzählers*, Met. Z. Schweiz. 49, 381 (1932).
- [11] J. J. NOLAN und V. H. GUERRINI, *The Determination of the Mass and Size of Atmospheric Condensation Nuclei*, Trans. Faraday Soc. 32, 1175 (1936).
- [12] H. FORSTER, *Studien über Kondensationskerne*, Dissertation (ETH, Zürich).
- [13] P. ACKERMANN, *Kondensationskernzählung in Payerne 1953*, Geofis. pur. appl. 29, 168 (1954).
- [14] M. BIDER, *Ergebnisse der eineinhalbjährigen Registrierungen der Anzahl der Kondensationskerne in Basel*, Geofis. pur. appl. 29, 178 (1954).
- [15] F. VERZÄR, *Kontinuierliche Zählung von atmosphärischen Kondensationskernen in St. Moritz*, Geofis. pur. appl. 29, 192 (1954).
- [16] A. SCHMAUSS und A. WIGAND, *Die Atmosphäre als Kolloid* (Vieweg & Sohn, Braunschweig).
- [17] S. OHTA, *Investigation on Condensation Nuclei*, Bull. Amer. met. Soc. 30, 295 (1949).
- [18] J. AITKEN, Coll. Scien. Papers of J. AITKEN (Cambridge University Press 1923).
- [19] C. JUNGE, *Übersättigungsmessungen an atmosphärischen Kondensationskernen*, Beitr. Geophys. 46, 108 (1936).
- [20] E. MÄRKI, *Die Ursachen der Gesetzmässigkeit in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrössen bei Regen und in den Wolken*, Met. Z. Schweiz 54, 174 (1937).
- [21] H. KOEHLER, *Zur Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre*, Geofys. Publ., Oslo, 2.
- [22] A. H. WOODCOCK, *Atmospheric Salt Particles and Raindrops*, J. Met. 9, 201 (1952).
- [23] H. DESSENS, L. LAFARGUE et P. STAHL, *Nouvelles recherches sur les noyaux de condensation*, Ann. Geophys. 1, 21 (1952).
- [24] W. WIELAND, *Eine neue Methode der Kondensationskernzählung*, Geofis. pur. appl. 30, H. 1, 137 (1955).

- [25] M. DIEM, *Messung der Grösse von Wolkenelementen* 11, Met. Rdsch. 1, 61 (1948).
- [26] F. AMBROSETTI, *Luftelektrische Messungen in Locarno-Monti*, Ann. schweiz. met. Zent.-Anst. 1943.
- [27] G. YAMAMOTO and T. OHTAKA, *Electron-Microscop-Study of Cloud and Fog Nuclei*, Sci. Rep. Tōhoku Univ. 7, 10 (1955).
- [28] H. WETTSTEIN, *Über die Beziehung der Elektrizität zum Gewitter*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 14, 60 (1869).
- [29] W. v. BEZOLD, *Zur Thermodynamik der Atmosphäre*, Sitz.-Ber. preuss. Akad. Wiss. 19 (1890).

### Summary

The present paper describes a method by which the behaviour of natural aerosol can be examined in a medium of water vapour at low degree of supersaturation. During a short experimental period the activity of the condensation nuclei was examined with regard to their dependence on the weather situation.

It was found that:

1. Up to a relative humidity of 101% the size and activity of the nuclei run parallel.
2. Aerosol near the ground always contains sufficient active nuclei to form condensation droplets where the relative humidity of the surrounding medium is 100–101%.
3. The nuclei which are of importance for cloud-physics cannot be distinguished as a separate group from the other aerosol.

(Eingegangen: 28. Dezember 1955.)

---

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

### The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact

By HARRY DONALD CONWAY, Ithaca, New York, USA<sup>1)</sup>

#### Introduction

In two recent articles [1], [2]<sup>2)</sup>, theoretical investigations were made of the distributions of contact pressure between (a) a rigid two-dimensional punch and an orthotropic half plane and (b) between a rigid, solid-of-revolution punch and a transversely isotropic half space. The indenting surfaces of the punches were of arbitrary form, friction was ignored, and the problems treated as elastic ones.

The present investigation concerns the calculations of the distributions of contact pressure between (a) two-dimensional, symmetrical, orthotropic bodies and (b) two transversely isotropic solids of revolution. It is seen that the problems are mathematically identical with the corresponding rigid punch problems and admit simple solutions.

<sup>1)</sup> Cornell University, College of Engineering, Department of Mechanics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 465.

### Analysis

Consider two two-dimensional bodies in contact at the point  $O$  as shown in Figure 1, and assume that the curvatures of the boundaries in the neighbourhood of  $O$  are sufficiently small for the bodies to be treated as half planes. The half planes are pressed together along their axes of symmetry, which pass through  $O$ , so that any two points of the half planes on this axis at great distances from  $O$

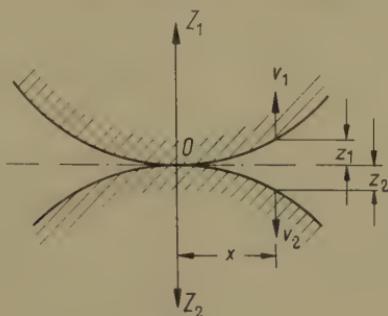


Figure 1

Two-dimensional or axisymmetrical bodies in contact.

will approach one another by a distance  $s$ . Assume that  $O$  does not move during this compression and that points at a very small distance  $x$  from  $O$  on the surfaces of the upper and lower half planes move vertically through distances  $v_1$  and  $v_2$  during the compression, as indicated in Figure 1.

If the original forms of the surfaces of the half planes in the vicinity of  $O$  are

$$z_1 = f_1(x), \quad z_2 = f_2(x) \quad (1)$$

and the aforementioned points coincide within the contact length after compression, then

$$s = (v_1 + v_2) = z_1 + z_2 = f_1(x) + f_2(x). \quad (2)$$

Thus, by differentiating with respect to  $x$ , it follows that

$$-(v'_1 + v'_2) = f'_1(x) + f'_2(x). \quad (3)$$

Assume the half planes to be of orthotropic material. It has been shown [1] that

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{E_2}{E_1} \quad (4)$$

where the moduli  $E_1$  and  $E_2$  for the upper and lower half planes, respectively, are defined by equations of the form

$$E = \frac{2}{(\alpha_1 + \alpha_2) S_{22}}$$

where the elastic constants are given by the stress-strain equations

$$\varepsilon_x = S_{11} \sigma_x + S_{12} \sigma_y, \quad \varepsilon_y = S_{22} \sigma_y + S_{12} \sigma_x, \quad \gamma_{xy} = S_{66} \tau_{xy} \quad (5)$$

and  $\alpha_1^2 \alpha_2^2 = S_{11}/S_{22}$  and  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (S_{66} + 2 S_{12})/S_{22}$ .

Thus, from equations (3) and (4), we write

$$v'_1 = -\frac{E_2}{E_1 + E_2} [f'_1(x) + f'_2(x)], \quad v'_2 = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} [f'_1(x) + f'_2(x)]. \quad (6)$$

The problem treated here is then mathematically identical with that of a half plane compressed by a rigid punch, the slope of which is such that the slope of the half plane in the contact length is altered by  $v'_1$  or  $v'_2$  as the case may be. This conclusion was also reached by MUSKHELISHVILI [3] but for the case of isotropic half planes rather than the more general orthotropic ones. A simple solution to the rigid punch problem for an isotropic half plane has been given by SCHUBERT [4] and has been extended to orthotropic half planes by the writer [1]. Thus the particular solutions which have already been given for the rigid punch problem have their counterparts in the present problem. Several of these will be discussed later.

Although the above discussion refers to problems in plane stress or plane strain, it will be seen that it also applies to that of two solids of revolution, approximating half spaces, pressed together along their common axis of symmetry. In this case the contact length is replaced by a circular contact area, and the problem is mathematically the same as that of a half space compressed by a rigid cylindrical punch. A relatively simple solution for the isotropic half space is available [4], as also is one for a transversely isotropic half space compressed by a rigid cylindrical punch [2]. Equation (4) for the axisymmetrical problem is then replaced by

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \frac{E_{eq(2)}}{E_{eq(1)}}, \quad (7)$$

where  $E_{eq(1)}$  and  $E_{eq(2)}$  are equivalent moduli defined by equations of the form

$$E_{eq} = \frac{\sqrt{A} \{ (\sqrt{AC} + L)^2 - (F + L)^2 \}^{1/2}}{2\sqrt{L} (AC - F^2)} \quad (8)$$

using the notation of LOVE [5] for the elastic constants  $A$ ,  $C$ ,  $F$  and  $L$ . Thus, for the axisymmetrical problem

$$v'_1 = -\frac{E_{eq(2)}}{E_{eq(1)} + E_{eq(2)}} [f'_1(x) + f'_2(x)], \quad v'_2 = -\frac{E_{eq(1)}}{E_{eq(1)} + E_{eq(2)}} [f'_1(x) + f'_2(x)]. \quad (9)$$

Some examples will now illustrate the above.

### Examples

Consider the case of two circular surfaces in contact, the radii of curvature at the contact point  $O$  being  $R_1$  and  $R_2$ , respectively, where  $R_1$  and  $R_2$  are sufficiently large for the assumption of half planes to be made. We may write, approximately

$$z_1 = \frac{x^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{x^2}{2R_2}$$

and hence it follows from equations (6) that

$$v'_1 = -\frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] x, \quad v'_2 = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] x.$$

The solution for a rigid punch of the form  $v' = k x$  pressed against a half plane has already been given [4]. From these results and for the present case, the pressure in the contact length is immediately written down as

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \left[ \frac{P}{\pi} + \frac{E_1 E_2}{4(E_1 + E_2)} \cdot \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} (a^2 - 2u^2) \right] \quad (10)$$

where  $2a$  is the contact length. To find the contact length, we write  $p(a) = 0$  and it follows that

$$a^2 = \frac{4P}{\pi} \cdot \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (11)$$

Substitution in equation (10) then gives

$$p(u) = \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - u^2}. \quad (12)$$

Writing  $E_1 = E_2 = E$  for the isotropic case, we obtain the well-known result of HERTZ [6].

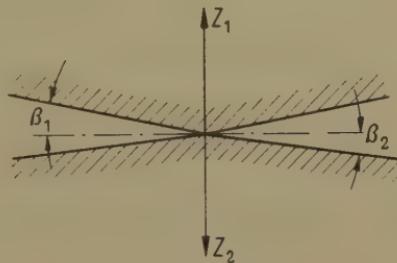


Figure 2a  
Wedges or cones in contact.

Similarly, for the axisymmetrical case of two spheres of transversely isotropic material having large radii and using known results [4] for the corresponding rigid punch problem, we have

$$p(u) = \frac{1}{6\pi\sqrt{a^2 - u^2}} \left[ \frac{3P}{a} + \frac{2E_{eq(1)} E_{eq(2)}}{E_{eq(1)} + E_{eq(2)}} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} (4a^2 - 6u^2) \right]. \quad (13)$$

The equation  $p(a) = 0$  then gives

$$a^3 = \frac{3P R_1 R_2 (E_{eq(1)} + E_{eq(2)})}{4 E_{eq(1)} E_{eq(2)} (R_1 + R_2)}. \quad (14)$$

and hence

$$p(u) = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - u^2}. \quad (15)$$

These also give the well-known results of HERTZ [6] for the special case of isotropic spheres when  $E_{eq(1)} = E_{eq(2)} = E/(1 - \nu^2)$ ,  $\nu$  being POISSON's ratio. We now consider the case of two wedges in contact as shown in Figure 2a, the angles  $\beta_1$

and  $\beta_2$  being assumed small. Writing

$$z_1 = \beta_1 x, \quad z_2 = \beta_2 x$$

it follows for the plane stress problem that

$$v'_1 = -\frac{E_2}{E_1 + E_2} (\beta_1 + \beta_2), \quad v'_2 = -\frac{E_1}{E_1 + E_2} (\beta_1 + \beta_2).$$

Now, the problem of a rigid wedge pressed against an orthotropic or isotropic half plane admits a simple solution [4], [1]. From the solution for this case we have, for the present problem

$$p(u) = \frac{E_1 E_2 (\beta_1 + \beta_2)}{\pi (E_1 + E_2)} \cosh^{-1} \frac{a}{u} \quad (16)$$

and

$$a = \frac{P}{\beta_1 + \beta_2} \cdot \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}. \quad (17)$$

Hence

$$p(u) = \frac{P}{\pi a} \cosh^{-1} \frac{a}{u}. \quad (18)$$

Similarly, we obtain the solution for the case of two cones pressed together from that for a rigid cone indenting an isotropic half space [4]

$$p(u) = \frac{E_{eq(1)} E_{eq(2)} (\beta_1 + \beta_2)}{2 [E_{eq(1)} + E_{eq(2)}]} \cosh^{-1} \frac{a}{u} \quad (19)$$

where

$$a^2 = \frac{2 P [E_{eq(1)} + E_{eq(2)}]}{\pi E_{eq(1)} E_{eq(2)} (\beta_1 + \beta_2)}. \quad (20)$$

Hence

$$p(u) = \frac{P}{\pi a^2} \cosh^{-1} \frac{a}{u}. \quad (21)$$

By assuming  $\beta_2$  to be negative and less than  $\beta_1$ , we solve the two-dimensional and axisymmetrical problems shown diagrammatically in Figure 2b. These have practical interest. It is seen that the pressure distributions have logarithmic singularities at the apex of the wedge or cone.

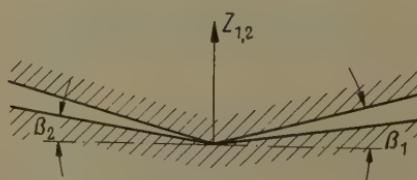


Figure 2b  
Wedges or cones in contact.

## REFERENCES

- [1] H. D. CONWAY, *The Indentation of an Orthotropic Half Plane*, ZAMP 6, 402 (1955).
- [2] H. D. CONWAY, *The Indentation of a Transversely Isotropic Half-Space by a Rigid Punch*, ZAMP 7, 80 (1956).
- [3] N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations*, 2nd edition (Moscow, 1946). Translated into English by J. R. M. RADOK (P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland, 1953), p. 305.
- [4] G. SCHUBERT, *Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken*, Ingen.-Arch. 13, 132 (1942).
- [5] A. E. H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, 4th edition (Cambridge University Press, 1927), p. 160.
- [6] H. HERTZ, *Gesammelte Werke*, vol. 1 (Leipzig 1895), p. 155.

## Zusammenfassung

Die vorliegende Untersuchung behandelt die Verteilung des Kontaktdruckes von (a) zwei zweidimensionalen, symmetrischen, orthotropen Körpern und (b) zwei transversal-isotropen Rotationskörpern. Man sieht, dass die zwei Probleme mathematisch identisch sind mit den entsprechenden Problemen der undefinierbaren Stempel und dass einfache Lösungen möglich sind. Mehrere Beispiele sind ausgearbeitet.

(Received: March 13, 1956.)

## Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Die Grundlagen der Akustik.** Von E. SKUDRZYK (Springer-Verlag, Wien 1954). XXII + 1084 S., 450 Textabbildungen; Ganzleinen Fr. 150.–.

Bei dem vorliegenden Werk handelt es sich um eine Enzyklopädie von wahrhaft imponierendem Umfang und Inhalt. Der Autor hat sich die Aufgabe nicht leicht gemacht, er ist den Problemen auf den Grund gegangen und hat den verschiedenen Literaturquellen nachgeforscht.

Es werden zuerst die für die Akustik besonders wichtigen mathematischen Gesetze und Funktionen rekapituliert, was in erster Linie zur Klärung und Erläuterung der physikalischen Verhältnisse dienen soll. Der Ableitung der Grundgleichungen des Schallfeldes sind längere Ausführungen gewidmet, wobei auch die verschiedenen Lösungen für die ebenen Wellen und die Kugelwellen eingehend diskutiert und die Effekte der Reflexion und Beugung von Schallwellen erörtert werden. Mit der Behandlung der elektromechanischen Analogien wird auf die Behandlung der akustischen Grundelemente, Masse und Steifigkeit, übergeleitet. Der Theorie der gekoppelten Systeme wird besondere Aufmerksamkeit gewidmet, wobei die graphischen Darstellungen sehr wertvoll sind. Damit sind auch die theoretischen Grundlagen für die Behandlung der elektroakustischen Wandler (Mikrophone und Schallsender) gegeben, deren Prinzipien einzeln besprochen werden. Ein besonderes Kapitel ist den so wichtigen piezoelektrischen Wandlern gewidmet. Mit den Ausführungen über das menschliche Ohr, über die Sprache und Musik wird in Kürze die physiologische Akustik behandelt, wobei immer wieder auf die Spezialliteratur verwiesen wird. Sinngemäß folgen dann die

Probleme der Raum- und Bauakustik. Mit der Theorie der inneren Reibung gelingt es, die akustischen Vorgänge in verlustbehafteten Medien zu erfassen. Längere Ausführungen widmet der Verfasser der Schallausbreitung- und Absorption im Wasser. Zum Schluss werden dann noch die strengen nichtlinearen Grundgleichungen des Schallfeldes behandelt.

Alle theoretischen Darlegungen werden immer wieder durch treffend ausgewählte numerische Beispiele erläutert. Die Benützung dieses inhaltsreichen Werkes wird durch ein besonders gut ausgearbeitetes Inhaltsverzeichnis sehr erleichtert. Von besonderem Wert ist auch ein wirklich vollständiges Literaturverzeichnis, das mehr als 100 Seiten umfasst.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Autor ein hervorragendes Nachschlagewerk der Akustik geschaffen hat, das sich als Ausgangspunkt zu einem vertieften Studium der Akustik eignet und das sicher in Fachkreisen grosse Anerkennung finden wird.

A. Lauber

**Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum.** Par W. SCHMEIDLER. (B. G Teubner, Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1954 [Teubners Mathematische Leitfäden, vol. 46]). 89 p.; cart. DM 7.80.

La théorie de l'espace de HILBERT et des opérations linéaires dans cet espace constitue actuellement le chapitre le plus important de l'Analyse fonctionnelle. Le lecteur désireux de s'initier rapidement dans ce domaine si important par ses applications trouvera dans l'opuscle ci-dessus une excellente introduction à son étude.

Après avoir défini dans le premier chapitre l'espace abstrait de HILBERT et les deux plus importantes de ses réalisations, l'espace des suites numériques de HILBERT et celui des fonctions de carré intégrable, et établi les premières propriétés qui en découlent (existence de systèmes orthogonaux complets, etc.), l'auteur expose dans le second chapitre la théorie des opérateurs linéaires bornés et plus spécialement celles des opérateurs compacts ou totalement continus ainsi que celle des opérateurs hermitiens positifs. Il en déduit les théorèmes classiques de FREDHOLM sur les équations intégrales. Le troisième et dernier chapitre étudie la théorie spectrale des opérateurs hermitiens bornés ou non. Chaque chapitre se termine par un certain nombre d'exercices et de compléments. M. Plancherel

**Elektrolyte.** Von HANS FALKENHAGEN. Zweite, neubearbeitete Auflage, (S. Hirzel Verlag, Leipzig 1953). 263 S., 94 Abb.; DM 15.60.

Die 2. Auflage von FALKENHAGENS *Elektrolyte* schliesst sich im Aufbau der Stoffbehandlung eng an die erste an: Betonung der theoretischen Überlegung, reichlicher Bezug von experimentellen Ergebnissen und Ausschaltung aller messtechnischen Details.

Nach Behandlung der klassischen Lehren über elektrolytische Lösungen (Kap. 1-4) werden die experimentellen Gründe für die Notwendigkeit ihrer Verbesserung geschildert (Kap. 5 und 6) und diese selbst in Form der Debye-Hückel-schen Theorie dargestellt (Kap. 7). Leider ist die statistische Ableitung der Grundgleichung nicht mehr, wie in der ersten Auflage, durch einen Abschnitt im Anhang unterbaut.

Im folgenden 8. Kapitel steht die Thermodynamik der Debye-Hückel-Elektrolyte zur Diskussion (Aktivitätskoeffizient, Löslichkeitsbeeinflussung usw.). Das längste Kapitel, Kapitel 9, behandelt die Theorie der Leitfähigkeit; ausführlich werden die allgemeinen Gleichungen nichtstationärer Vorgänge abgeleitet. Dann folgt die Bestimmung der Leitfähigkeit für Gleich- und Wechselfelder,

Vergleich der Ergebnisse mit empirischen Daten, schliesslich die Schilderung und theoretische Behandlung des Wienschen Feldstärkeeffekts. Ein kurzer Paragraph handelt vom Dissoziationsspannungseffekt. Eine Zusammenstellung von theoretischen und experimentellen Aussagen über die Viskosität starker Elektrolyte gibt Kapitel 10.

Wesentlich Neues bringen die beiden letzten Kapitel. Im elften werden eine die Raumbeanspruchung der Ionen erfassende Verteilungsfunktion von EIGEN und WICKE eingeführt und ihre Konsequenzen überprüft, im zwölften die Theorie der Mischung starker Elektrolyte von ONSAGER und FUOSS entwickelt.

Der «Falkenhagen» dürfte mit der neuen Auflage seinen angestammten Platz weiterhin behaupten, wozu nicht wenig auch die Ausführlichkeit von Autoren- und Inhaltsverzeichnis und eine enzyklopädisch anmutende Zitatenvielfäule beitragen.

W. Baumgartner

**Elements of Statistical Mechanics.** Von D. TER HAAR (Rinehart & Co., Inc., New York 1954). 468 S., 56 Fig.; \$8.50.

Von den zahlreichen Büchern über statistische Mechanik gibt es keines, das so wie dieses zur Einführung in das ganze Gebiet der klassischen wie der Quantenstatistik geeignet ist und außer den Grundlagen noch einen so weiten Bereich von Anwendungen bringt. Von diesen seien, ohne Vollständigkeit der Aufzählung, als Beispiele angeführt: Virialentwicklung der Zustandsgleichung, Transportphänomene in Metallen, Halbleiter, Kooperativphänomene (Ising-Modell, ONSAGERS exakte Lösung im zweidimensionalen Fall), statistische Methoden der Kernphysik, Gleichgewichtstheorie des Ursprungs der chemischen Elemente.

Die mehr prinzipiellen Fragen über das *H*-Theorem und die irreversiblen Prozesse sind in Anhängen etwas kürzer behandelt. Ein kleiner Schönheitsfehler des ausgezeichneten und vom Referenten aufs wärmste empfohlenen Buches sei noch bemerkt: das «principle of detailed balancing» gilt in Wahrheit in der Quantenstatistik ebensowenig allgemein wie in der klassischen Statistik, sondern nur in der ersten Näherung der Störungstheorie für die Übergangswahrscheinlichkeiten. Das *H*-Theorem gilt auch hier unter allgemeineren Bedingungen, analog zu BOLTZMANNS Zyklen in der klassischen Statistik. *W. Pauli*

**Theorie der chemischen Bindung auf quantentheoretischer Grundlage.** Von H. HARTMANN (Springer-Verlag, Berlin 1954). 357 S., 53 Abb.; DM 46.80 und 49.80.

Das Buch gliedert sich in drei ungefähr gleich grosse Hauptabschnitte. Der erste Abschnitt bringt die quantenmechanischen Grundlagen für die Theorie der chemischen Bindung. In konzentrierter Form und daher nicht überall leicht lesbar wird der Leser mit dem im Rest des Buches verwendeten Formalismus, den gruppentheoretischen Hilfsmitteln, den Näherungsmethoden und den hauptsächlichen Ansätzen für die Mehrelektronen-Eigenfunktionen bekanntgemacht.

Im zweiten Drittel folgt die Anwendung auf Grundprobleme der chemischen Bindung (Wasserstoffmolekülion und Wasserstoffmolekül), an Hand derer die beiden hauptsächlichen Näherungsverfahren, die Methode der Valenzstrukturen und die Methode der Molekülzustände ausserordentlich klar erläutert und kritisch gegeneinander und gegen feinere Näherungen abgewogen werden.

Der dritte Teil enthält Anwendungen der Theorie auf kompliziertere Moleküle und den Vergleich mit der Erfahrung. Man freut sich an der allerorts gesunden Kritik des Autors, der sich stets des Grades der theoretischen Näherung bewusst, nirgends zu Spekulationen hinreissen lässt, zu denen das grosse vorliegende

Tatsachenmaterial die Theoretiker so leicht verführt. Hypothetisches und Halb-empirisches ist jeweils klar als solches dargestellt und behandelt. An einigen Stellen würde man statt der Literaturangabe etwas grössere Ausführlichkeit wünschen, muss sich aber zufrieden geben, wenn man im Vorwort liest, dass der Verfasser keine Monographie, sondern ein Mittelding zwischen einer solchen und einem Lehrbuch zu schreiben beabsichtigte.

Gesamtanlage und Haltung des Werkes sind somit mehr auf das Prinzipielle als auf die Erfassung möglichst vieler chemischer Tatsachen ausgerichtet. Es wendet sich daher weniger an den präparativen Chemiker als an Physiker und theoretische Chemiker. Für diese bildet es eine ausserordentlich wertvolle Hilfe.

H. Labhart

**Einführung in die technische Mechanik.** Von ISTAVAN SZABO (Springer-Verlag, Berlin 1954). 383 S., 484 Abb.; DM 19.50, Ganzleinen DM 22.50.

Das vorliegende Buch ist aus der Absicht entstanden, dem Studierenden der Ingenieurwissenschaften am Beginn seines Studiums rasch diejenigen mechanischen Kenntnisse zu vermitteln, die er für seine weiteren Studien braucht. Das im Hinblick auf dieses Ziel ausgewählte Stoffgebiet umfasst die Elemente der Vektorrechnung, die analytische und graphische Statik des starren Körpers und der Systeme starrer Körper sowie des Seiles, die Festigkeitslehre des Balkens, die Dynamik des starren Körpers, lineare Schwingungen mit einem Freiheitsgrad, Stossprobleme sowie je ein Kapitel über Hydro- und Ähnlichkeitsmechanik. Der bewusste Verzicht auf strenge Systematik und die gestraffte Darstellung der weitergehenden Abschnitte erlauben dem Verfasser, trotz des umfangreichen Stoffes, die grundlegenden Teile in solcher Ausführlichkeit zu behandeln, dass das Buch für den Anfänger noch bequem lesbar ist. Das Verständnis der Theorie wird dem Lernenden auch durch die klaren Figuren und die zahlreichen interessanten Übungsaufgaben erleichtert.

H. Maag

**Astronautica Acta.** Offizielles Organ der Internationalen Astronautischen Föderation (Springer-Verlag, Wien); erscheint vierteljährlich; Jahresbezugspreis sFr. 37.20. Vol. I (1955), Fasc. 1: 60 S., 10 Abb. und 7 Tab.

Die Internationale Astronautische Föderation (IAF) hat ein erstes Heft ihres Publikationsorgans herausgegeben. Die vierteljährlich zu erscheinende Zeitschrift soll, laut der Zielsetzung der IAF, über die Forschungsresultate der nationalen astronautischen Gesellschaften berichten und dadurch – nach Möglichkeit – einer Koordinierung der Arbeiten dienen.

Nachdem die Astronautik aus dem Stadium der Phantasievorstellungen, über die Pionierarbeiten der Raketentechnik, immer mehr in das Feld der Realitäten rückt, zieht sie zunehmend grössere Forschungskreise in ihre Bahnen. Dem noch fernen Ziel – einer Raumfahrt – geht eine grosse Anzahl von Problemen und Aufgaben auf allen Gebieten der modernen Wissenschaften voraus, die bis in die Grundlagenforschung reichen. Vielerorts wird eine sehr seriöse Arbeit geleistet, wobei die erreichten Resultate nicht nur direkt der Astronautik dienen, sondern darüber hinaus ganz allgemein der Wissenschaft und der Technik zugute kommen.

Die vorliegende Publikation darf als Beweis dafür angesehen werden. Als Herausgeber und Fachbeirat zeichnen anerkannte Wissenschaftler und Fachleute aus verschiedenen Ländern. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. WERNHER VON BRAUN (Huntsville, USA.) über die Aussichten der Astronautik versehen, bringt das Heft zunächst eine Abhandlung «Die Erforschung der Initialvorgänge bei Verbrennungsprozessen» von Dr. IRENE SÄNGER-BREDT (Stuttgart, Deutsch-

land), S. 3–31. Darin wird der Mechanismus der exothermen Reaktionen bei einzelnen Molekülstößen betrachtet, die bisherigen experimentellen Verfahren zum Studium dieses Problems werden besprochen, und als Schlussfolgerung wird ein «Vorschlag zur Anwendung der Molekularstrahlmethode auf die Messung der Energietransformationen bei Reaktionsstößen» unterbreitet und begründet. – H. STRUGHOLD (Randolph Air Force Base, Texas, USA.) behandelt im Aufsatz «Space Equivalent Conditions Within the Earth's Atmosphere Physiological Aspects», S. 32–40, die physiologischen Fragen der Raumfahrt, wie zum Beispiel Sauerstoffmangel, Kochen der Körperflüssigkeiten, «Nullschwere», dann Auftreten kosmischer Strahlung, Einfall der Meteoriten usw. Diese Bedingungen wurden bei den heutigen Flügen bemannter Raketen bereits angetroffen und stellen somit ein aktuelles Problem dar. – Eine Optimalbetrachtung über die Richtungssteuerung des Raketenschubes zwecks maximaler Energiezunahme der Nutzlast enthält der Aufsatz von D. F. LAWDEN (Birmingham, England) «Optimal Programming of Rocket Thrust Direction», S. 41–56. Die Raketenbewegung wird in der Atmosphäre unter Einwirkung des Schwerefeldes und im Vakuum behandelt. – Der letzte Beitrag, «Über den Nachweis von schweren Primären der kosmischen Strahlung mittels einer Farbstoffmethode», von Prof. Dr. J. EUGSTER (Universität Zürich, Schweiz) gibt eine interessante Neuerung aus der Messtechnik der kosmischen Strahlen bekannt, die es erlaubt, bei biologischen Untersuchungen die Photoplatten zu umgehen. – Neun weitere Berichte über Arbeiten auf den Gebieten der Raummechanik, der Verbrennungs- und Antriebsfragen, der kosmischen Strahlung und über die Meteoriten sind angekündigt.

Diese Publikation der IAF präsentiert sich in einer sorgfältigen und angenehm ansprechenden Form. Man möchte hoffen, dass sie die verdiente Beachtung findet und dass die weiteren Hefte ebensoviel interessantes Material enthalten werden.

Zb. Plaskowski

**The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures.** Von ALFRED M. FREUDENTHAL (John Wiley & Sons, New York 1950). 587 S., 191 Fig.; \$9.50.

Das unelastische Verhalten unserer Bau- und Werkstoffe gehört wohl zu denjenigen noch zu lösenden Problemen, in denen die in der Literatur geäusserten Auffassungen und Hypothesen besonders stark divergieren. Es ist deshalb ein Verdienst von Prof. M. FREUDENTHAL, in seinem Buche die verschiedenen «Theorien» im Gebiete der Plastizität und der Brucherscheinungen einschliesslich des Traglastverfahrens vergleichend dargestellt zu haben. Das Buch, das auf das technische Endziel der Tragwerksbemessung orientiert ist, kann beim heutigen Stand der Erkenntnisse selbstverständlich keine abschliessende Lösung des behandelten vielschichtigen Problemkomplexes geben, aber es stellt durch den gegebenen umfassenden Überblick ein wertvolles Hilfsmittel dar, von dem aus eine zukünftige Abklärung wesentlich gefördert werden kann.

F. Stüssi

**Magnetic Cooling.** Von C. G. B. GARRETT (Harvard University Press, John Wiley & Sons, Inc., New York 1954). X + 110 S., 13 Fig.; \$4.50.

In meist leicht zu lesender und flüssig geschriebener Form werden die Grundzüge von Theorie und Technik der Erzeugung von Temperaturen unter 1° Kelvin mittels magnetischer Kühlung dargestellt. Der beschränkte Umfang des Buches erlaubt natürlich nicht ein Eingehen auf Einzelheiten, speziell praktischer Natur; laufend angegebene Arbeiten der Fachliteratur erleichtern aber ein weiteres Eindringen in Detailfragen. Kapitel I illustriert die Gründe, die eine Forschung bei

teifster Temperatur genau so berechtigt erscheinen lassen wie eine solche bei (biologisch) normalen oder sehr hohen Celsiusgraden. In Kapitel II wird die Technik, in Kapitel III die Thermodynamik magnetischer Kühlung besprochen. Kapitel IV diskutiert Messung von Temperaturen und spezifischer Wärme. Die Kapitel V und VI bringen als Hauptobjekt Theorie von und Messergebnisse an paramagnetischen Stoffen. Die beiden letzten schliesslich behandeln Kooperativeffekte in paramagnetischen Salzen, verursacht durch Dipol-Dipol- und Austauschwechselwirkung, dann abschliessend und nur summarisch Eigenschaften des Heliums unterhalb 1° Kelvin, Supraleitfähigkeit in Metallen und Anwendung in der Kernphysik (Bestimmung von magnetischen Kernmomenten).

W. Baumgartner

**Handbook of Experimental Stress Analysis.** Herausgegeben von M. HETÉNYI (John Wiley & Sons, New York 1950). 1077 S.; \$15.-.

Die vorliegende Monographie über «Experimentelle Spannungsuntersuchung» ist ein «Vielmännerbuch», das dank einem durch den Herausgeber, Prof. M. HETÉNYI, geschickt aufgestellten Programm und durch vorzügliche Auswahl der zuständigen Mitarbeiter zu einem vorbildlichen Beispiel einer solchen technischen Anthologie über ein bestimmtes Fachgebiet geworden ist. In achtzehn Kapiteln und drei Anhängen werden die Grundlagen, Hilfsmittel und wichtigsten Ergebnisse der Versuchstechnik im Gebiete der Festigkeitslehre auf 1060 Seiten eingehend und umfassend dargestellt. Durch die Aufteilung des Stoffes auf die für die einzelnen Teilgebiete besonders ausgewiesenen und damit zuständigen Bearbeiter wird erreicht, dass alle wichtigen Einzelfragen des behandelten Stoffgebietes, das heute in seiner Vielfalt von einem Einzelnen kaum mehr beherrscht werden kann, entsprechend dem neuesten Stand der Erkenntnisse und der Technik behandelt sind. Der Reichtum des Inhalts sei durch einige Stichworte wenigstens angedeutet: nach einer Darstellung der mechanischen Eigenschaften von Bau- und Werkstoffen werden die wichtigsten Verfahren und Methoden der Materialprüfung, die mechanischen, optischen und elektrischen Verfahren der Spannungsmessung und die Grundzüge einer Beurteilung der Spannungszustände als Grundlage zur Bemessung der Tragwerke dargestellt. Im Anhang werden in drei Abschnitten die theoretischen Grundlagen der Modellmechanik sowie der Fehler- und Ausgleichsrechnung behandelt; ein eigentliches Kabinettstück ist die meisterhafte Darstellung der Grundzüge der Elastizitätstheorie durch den Altmäister der technischen Mechanik, S. TIMOSHENKO. Das hervorragende Buch wird ein unentbehrliches Nachschlagewerk werden für alle Ingenieure, die sich mit der Versuchsforschung im Gebiete der Festigkeitslehre beschäftigen.

F. Stüssi

**Ernst Abbe.** Von N. GÜNTHER (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH., Stuttgart 1951). 203 S., 21 Abb.; DM 9.80.

Das in der Sammlung «Grosse Naturforscher» in zweiter Auflage erschienene Buch vermittelt ein ausführliches und aufschlussreiches Lebensbild des grossen Physikers, Industrieunternehmers und zukunftweisenden Soziologen.

Durch C. ZEISS, den Gründer der nachmaligen Weltfirma, wurde ABBE (1840–1905), damals Privatdozent für Mathematik in Jena, auf die optischen Probleme aufmerksam gemacht. Während die damalige Herstellung von Mikroskopen ausschliesslich auf langwierigen Versuchen beruhte, machte ABBE aus ihr eine Wissenschaft. Mit seiner Sinusbedingung und seiner beugungstheoretischen Erklärung der Bildentstehung schuf er die Grundlagen hierzu. Im Hinblick auf die möglichst weitgehende Beseitigung des sekundären Spektrums erschienen

Gläser mit bestimmten optischen Eigenschaften als besonders günstig. Da die Glashütten ABBES diesbezügliche Anregungen nicht beachteten, gründete er mit O. SCHOTT die Jenaer Glashütte Schott & Gen., die bald führend wurde.

Aus der kleinen Mechanikerwerkstatt war inzwischen eine Weltfirma geworden. Nach dem Ableben von C. ZEISS und dem Ausscheiden seines Sohnes war ABBE praktisch alleiniger Inhaber der Zeiss-Werke. Durch Errichtung der Zeiss-Stiftung vermachte er jedoch schon zu Lebzeiten praktisch sein ganzes Vermögen dem Werk und der Universität Jena.

R. Stettler

**Materie als Feld.** Von F. HUND (Springer-Verlag, Berlin 1954). 418 S., 40 Abb.; DM 48.—/52.—.

Das vorliegende Werk behandelt die Feldtheorie der Materie. Das partikelhafte Verhalten wird erst abgeleitet mit Hilfe der Quantentheorie. Der sonst übliche Weg vom Elementarteilchen zum Feld wird also umgekehrt durchlaufen. So ergibt sich manches Resultat auf eine ungewohnte und darum originelle Weise. Daraus sowie durch abgewogene Verteilung von Formalismus und physikalischer Durchleuchtung bringt das Buch ein wesentlich vertieftes Verständnis der mathematischen Formulierungsmöglichkeiten von Dingen wie Ladung, Spin, Atomismus usw. Besonderen Nutzen dürfte es als Parallel- oder kurz nachfolgende Lektüre beim Studium der bekannten Werke über die Quantentheorie der Wellenfelder haben.

Ausgehend vom elektromagnetischen Feld als Vorlage wird das anschauliche Wellenbild der Materie besprochen. Das unanschauliche des Wellenbildes, die Partikel, ergibt sich bei der nachfolgenden Besprechung der Quantelung. Anschliessend folgt Diskussion von Spin und Kopplung verschiedener Materiefelder. Zuletzt werden die verschiedenen Teilchensorten und ihre Umwandlung ineinander studiert. Als Einführung tritt das Buch nicht auf Fragen und neue Ergebnisse der Theorie (Divergenzschwierigkeiten, Renormierung) ein. W. Baumgartner

**Probleme der Plastizitätstheorie.** Von W. PRAGER (Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1955). 100 S., 52 Abb.; Fr. 12.50.

Das Buch stellt die Niederschrift von Gastvorlesungen dar, die der Verfasser im Wintersemester 1954/55 an der ETH über ausgewählte Probleme der Plastizitätstheorie gehalten hat. Die Auswahl des Stoffes war dabei zum einen Teil durch das Forschungsinteresse des Vortragenden, zum anderen durch seinen Wunsch bestimmt, Überschneidungen mit an der ETH vertretenen Forschungsrichtungen zu vermeiden.

Im ersten Abschnitt werden kinematische Modelle entwickelt, welche das Verhalten der verschiedenen Formen des ideal-plastischen Stoffes anschaulich zu verfolgen und die Theorie des plastischen Potentials geometrisch zu interpretieren gestatten.

Im zweiten Abschnitt werden als einfache Beispiele elastisch-plastische Fachwerke diskutiert und an ihnen die Extremalprinzipien der Plastizitätstheorie sowie die Begriffe der Tragfähigkeit und des Anpassungsvermögens entwickelt.

Der dritte Abschnitt ist dem Traglastverfahren gewidmet. Zunächst werden die beiden Fundamentaltheoreme, auf denen es beruht, in aller Allgemeinheit abgeleitet. Sodann wird an verschiedenen Beispielen (Rahmen, Platten, Zylinderschalen) gezeigt, wie mit ihrer Hilfe die Traglast eingeschränkt werden kann.

Im letzten Abschnitt behandelt der Verfasser endliche plastische Formänderungen. Dabei werden vor allem ebene Fließvorgänge und ihre Behandlung durch gleichzeitige Konstruktion in der physikalischen, der Spannungs- und der

Geschwindigkeitsebene erläutert, wobei besondere Sorgfalt auf die Bedingung positiver Dissipationsleistung gelegt wird. Als Beispiele werden stationäre (Ziehprozesse) und pseudostationäre Vorgänge (Eindringen eines Keils in den plastischen Halbraum) besprochen.

Das Buch ist elementar geschrieben und bei aller grundsätzlichen Schärfe stets auf die praktischen Anwendungen hin ausgerichtet. Es gibt einen ausgezeichneten Überblick über die technischen Möglichkeiten, die uns heute schon zur Verfügung stehen. Besondere Erwähnung verdient die sorgfältige Dokumentation, die indessen nicht darüber hinwegzutäuschen vermag, dass zahlreiche entscheidende Beiträge (in einigen Fällen hier erstmals publiziert) dem Verfasser zu verdanken sind.

H. Ziegler

**An Introduction to Electronic Analogue Computers.** Von C. A. A. WASS (Pergamon Press Ltd., London 1955). 237 S., 149 Fig.; 40 s.

Das Buch befasst sich hauptsächlich mit elektronischen Integrieranlagen und ihrer Anwendung bei der Lösung («simulation») von Schwingungsproblemen. Hauptteil einer solchen Anlage ist ein in vielen Exemplaren vorhandener Gleichstromverstärker, der als Integrator oder als Addierglied geschaltet werden kann. Für diesen Verstärker sind zahlreiche Ausführungsformen gegeben, und das schwierige Problem der Stabilisierung ist einlässlich behandelt. Für die Multiplikation und die Erzeugung von Funktionen sind verschiedene elektronische und elektromechanische Methoden erläutert. Eine Anzahl von Anwendungsbeispielen und eine Beschreibung einiger bestehender Rechenanlagen ergänzen das Buch, dessen Studium für Erbauer wie für Benutzer von Analogierechengeräten lohnend ist.

A. P. Speiser

**Ricci-Calculus. An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications.** 2. Auflage. Von J. A. SCHOUTEN (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1954 [Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 10]). XX + 516 S., 16 Fig.; 58.60 DM.

Die erste Auflage von SCHOUTENS *Ricci-Kalkül* erschien vor gut dreissig Jahren. Seither hat diese Methode – weitgehend auch durch die zahlreichen Untersuchungen des Verfassers selbst – einen viel grösseren Anwendungsbereich gefunden und manche Verfeinerungen erfahren, so dass die zweite Auflage zu einem vollständig neuen Buch geworden ist, das den mannigfachen Fortschritten Rechnung trägt. Es ist hier nicht möglich, auf alle Änderungen und Neuerungen einzugehen. Um einen Überblick über den Inhalt des Bandes zu geben, seien wenigstens die Kapitelüberschriften angegeben. I. Algebraic preliminaries. II. Analytic preliminaries. III. Linear connexions. IV. Lie groups and linear connexions. V. Imbedding and curvature. VI. Projective and conformal transformations of connexions. VII. Variations and deformations. VIII. Miscellaneous examples.

Diese Einführung ist ein glänzendes Lehrbuch des Ricci-Kalküls in seiner modernen Form. Die Formulierung ist knapp und klar, die Bezeichnungen sind äusserst übersichtlich, und konsequent wird die Kern-Index-Symbolik verwendet. Dem Buch ist als eine sehr wertvolle Ergänzung ein eingehendes, wenn auch nicht vollständiges (was fast nicht mehr möglich ist) Literaturverzeichnis von fast 100 Seiten mit gegen 1400 Titeln beigefügt. Schliesslich verdient auch der sorgfältige und übersichtliche Druck besonders hervorgehoben zu werden, denn bei der grossen Zahl von Indizes stellt dies ganz erhebliche Anforderungen. – Damit wurde vom Verfasser wieder ein modernes Standardwerk über den Ricci-Kalkül geschaffen, das eine erhebliche Lücke in der Literatur ausfüllt und die besten Dienste leisten wird.

E. Roth-Desmeules

ELEKTRONENMIKROSKOPE  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

*Im Herbst 1956 erscheint*

**Fünfzig Jahre Relativitätstheorie - Cinquantenaire de la  
Théorie de la Relativité - Jubilee of Theory of Relativity**

Bern, 11.-18. Juli 1955

herausgegeben von / édité par / edited by A. MERCIER und M. KERVAIRE  
10 Hauptvorträge und 23 Kurze Mitteilungen mit Diskussionen 10 Exposés principaux et 23 Communications avec leurs discussions 10 Main Reports and 23 Short Lectures with Discussions

**Helvetica physica acta, Supplementum IV**  
etwa 320 Seiten Fr./DM 36.-

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART

## MATHEMATICAL REVIEWS

A journal containing reviews of the mathematical literature of the world, with full subject and author indices

*Sponsored by*

*The American Mathematical Society  
The Mathematical Association of America  
The Institute of Mathematical Statistics  
The Edinburgh Mathematical Society  
Société Mathématique de France  
Matematisk Forening i København*

*Het Wiskundig Genootschap te Amsterdam  
The London Mathematical Society  
Polskie Towarzystwo Matematyczne  
Unión Matemática Argentina  
Indian Mathematical Society  
Unione Matematica Italiana*

Subscriptions accepted to cover the calendar year only. Issues appear monthly except July. \$20.00 per year. \$10.00 to members of sponsoring organizations. An edition printed on one side, for bibliographical purposes, is available at an additional charge of \$1.00 per year. Unesco Book Coupons may be used in payment.

*Send subscription orders to*

**AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY**

80 Waterman Street, Providence 6, R. I.

# MTW Mitteilungen

Zeitschrift zur Pflege der  
Beziehungen zwischen  
**Mathematik, Technik, Wirtschaft**

## Inhalt:

Beiträge, Tagungsberichte, Erfahrungsberichte, Bearbeitungsroutinen, Labormitteilungen, Informationen, Zeitschriftendienst, Literaturberichte, Dokumentation.

## Erscheinungsweise:

Sechsmal jährlich in den Monaten Jänner, März, Mai, Juli, September, November.

## Jahresabonnement:

Österreich S 50.-

Deutsche Bundesrepublik DM 10.-

Schweiz sFr. 10.-

Übriges Ausland \$ 2.50

Die MTW-Mitteilungen können durch jede Buchhandlung oder unmittelbar durch das Mathematische Labor der Technischen Hochschule Wien, Wien IV, Karlsplatz 13, Österreich, bezogen werden. Von dort können auch kostenlos Probenummern angefordert werden.

In Kürze erscheinen:

# MTW Berichte

Einzelschriften zur Pflege der  
Beziehungen zwischen  
**Mathematik, Technik, Wirtschaft**

# MTW Tabellen

Tabellen aus  
**Mathematik, Technik, Wirtschaft**

## Herausgeber:

Mathematisches Labor

Technische Hochschule Wien